N° d'ordre 376

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Albert LEVY
Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Toulouse

L'APPROXIMATION CLASSIQUE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE
OU
ILLUSTRATIONS DE L'EMPLOI DES FONCTIONS SPÉCIALES
EN
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Soutenue le 20 JAN. 1970, devant la Commission d'examen

M. le Doyen E. DURAND — *Président*
MM. J.-M. MÉRIC, P. GAUTIER — *Examinateurs*

N° d'ordre

THESE

présentée

A LA FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE TOULOUSE

pour obtenir

le GRADE de DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

par

Albert LEVY
Maître-Assistant à la Faculté des Sciences de Toulouse

L'APPROXIMATION CLASSIQUE EN MÉCANIQUE QUANTIQUE
OU
ILLUSTRATIONS DE L'EMPLOI DES FONCTIONS SPÉCIALES
EN
PHYSIQUE MATHÉMATIQUE

Soutenue le 1970, devant la Commission d'examen

M. le Doyen E. DURAND — *Président*
MM. J.-M. MÉRIC, P. GAUTIER — *Examinateurs*

UNIV.
LEIDEN
BIBL.

UNIVERSITE DE TOULOUSE

FACULTE DES SCIENCES

PERSONNEL ADMINISTRATION

M. MATHIS : Président du Conseil Transitoire de Gestion.
M. A G I D : Assesseur
M. LELUBRE : Assesseur

H O N O R A R I A T

M. CAPDECOMME.....Doyen honoraire, Recteur Honoraire
M. DELTHEIL.....Recteur honoraire, Doyen honoraire Professeur honoraire.
M. DUPOUY.....Doyen honoraire, Membre de l'Institut, Directeur Général honoraire du C.N.R.S.
M. DURAND.....Doyen honoraire.
M. FOUCHE.....Professeur honoraire.
M. GAUSSENS.....Professeur Honoraire, Correspondant de l'Institut.
M. JACQUES.....Professeur Honoraire.
M. MIGNONAC.....Professeur honoraire.
M. MORQUER.....Professeur honoraire, correspondant de l'Institut.
M. VANDEL.....Professeur honoraire, Membre de l'Institut
M. TEISSIE-SOLIER Professeur honoraire.

P R O F E S S E U R S

M. ESCANDE.....Mécanique des fluides, Membre de l'Institut.
M. DUPOUY.....Physique, Membre de l'Institut.
M. CASTERAS.....Géologie,Correspondant de l'Institut.
M. BEDOS.....Chimie.
M. CAPDECOMME.....Minéralogie.
M. DUPIN.....Radioélectricité.
M. NOUVEL.....Biologie générale.
M. GALLAIS.....Chimie,Correspondant de l'Institut
M. DURAND.....Physique.
M. FERT.....Physique.
M. DIEHL.....Agronomie.
M. LESBRE.....Chimie organique.
M. BRUNEL.....Physiologie végétale.
M. HURON.....Mathématiques appliquées.
M. MARGULIS.....Pédologie.
M. TRICHE.....Chimie analytique & spectrographie.
M. LEDOUX.....Zoologie appliquée.
M. RIVALS.....Agriculture.
M. PERRIER.....Physique.
M. MATHIS.....Chimie.
M. ORLIAC.....Géochimie & Minéralogie.
M. LAFOURCADE.....Physique.
M. ANGELIER.....Zoologie.
Mlle de FERRE.....Botanique.
M. FARRAN.....Minéralogie & Géotechnique.
M. LAUDET.....Physique théorique & Calcul Numérique.
M. SERFATY.....Biologie animale.
M. NOUGARO.....Hydraulique générale & appliquée.
M. LAGASSE.....Electrotechnique.
M. GARDY.....Génie chimique.
M. BLANC.....Physique nucléaire.
M. BIREBENT.....Electronique appliquée.
M. VOIGT.....Chimie minérale.
M. LEREDDE.....Botanique.
M. LELUBRE.....Géologie.
M. TROCHAIN.....Botanique.
M. MASDUPUY.....Chimie.
M. LALAGUË.....Mathématiques générales.
M. DESSENS.....Physique du globe, correspondant de l'Institut.
M. BOUIGUE.....Astronomie.
M. COUCHET.....Physique.
M. LEJEUNE.....Chimie.
M. LASCOMBES....Botanique.
M. ASSELINEAU...Chimie biologique.
M. MAURET.....Chimie systématique.
M. AGID.....Physiologie.
M. MONTANT.....Cryptogamie.
M. GAUTIER.....Physique.
M. CRUMEYROLLE..Mathématiques.
M. GOURINARD....Géologie.
M. PULOU.....Minéralogie.
M. CAMBOU.....Physique spatiale.
M. MIQUEL.....Chimie.
M. LACOSTE.....Eléctrotechnique.
M. THIBAULT.....Mécanique rationnelle et appliquée.
M. MONTEL.....Chimie physique et Electrochimie.
M. MASCART.....Mathématiques.
M. MEDIONI.....Psychophysiologie.
M. THIRRIOT.....Hydrodynamique E.N.S.E.I.H.T.
M. BRENON.....Géologie.
M. LAFON.....Calcul différentiel et intégral.
M. RAYNAUD.P....Physiologie animale.
M. ZALTA.....Chimie biologique.
M. SEVELY.....Electrotechnique.
M. POMMIEZ.....Mathématiques.
M. REY.....Biologie végétale.
M. COULOMB.....Physique.

P R O F E S S E U R S A S S O C I E S

M. MANSOUR
M. SAKUMA

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. HAMANT..... Botanique
Mme BRUNEL..... Physiologie végétale
Mlle BERDUCOU.... Physiologie végétale
M. MARONI..... Chimie

P. PICCA..... Physique.
M. MERIC..... Mathématiques appliquées.
M. BEETSCHEN..... Biologie générale.
Mme LECAL..... Zoologie.
M. BUGAREL..... Génie chimique;
M. MIROUSE..... Géologie.
M. PILOD..... Physique.
M. LARROQUE..... Physique.
M. BARRANS..... Chimie.
M. TRINQUIER..... Physique.
M. GRUAT..... Mécaniques des fluides (hydraulique)
Mme LAFON..... Mathématiques.
Mlle LAPEYRE..... Mathématiques (Informatique)

M. DAT..... Mécanique des fluides
M. JEANNIN..... Chimie minérale.
M. BERTRAND.... Chimie.
M. SATGE..... Chimie organique.
M. DESQ..... Mathématiques.
M. MAHENC..... Chimie.
M. LATTES..... Chimie.
M. ROCARD..... Electronique;
M. DEGEILH..... Physique.
M. FALLOT..... Biologie végétale, (Viticulture et arboriculture).
M. POILBLANC... Chimie.
M. TOUZE.....Physiologie végétale.
M. FRASNAY..... Mathématiques.
M. CASSAGNAU... Zoologie.
M. GUERIN..... Mathématiques.

MAITRES DE CONFERENCES

M. BLANCHARD..... Mathématiques
M. COULON..... Physique industrielle.
M. HOFFMANN..... Electronique.
M. BITSCH..... Zoologie.
M. FONTAN..... Physique nucléaire.
M. PESCIA..... Physique.
M. SICARD..... Biologie génétique.
M. CAUSSINUS..... Mathématiques appliquées.
M. DE LOTH..... Chimie physique.
M. MARTY..... Physique industrielle.
M. BAUDRAS..... Chimie biologique.
M. DURAND Ph..... Physique.
M. LEFEUVRE..... Electronique E.N.S.E.I.H.T.

M. SOUQUET..... Géologie
M. SAPORTE..... Physique
M. ATTEIA..... Mathématiques
M. ENJALBERT... Chimie.
M. IMBERT..... Psychophysiologie.
M. SCHNEIDER... Biologie cellulaire.
M. ANGELINO.... Génie chimique.
M. DABOSI..... E.N.S.C.
M. ETTINGER.... Mathématiques.
M. CALVET..... Mécanique des fluides (E.N.S.E.I.H.T)
M. PAGANI..... Physique.

MAITRES DE CONFERENCES ASSOCIES

M. P U N
M. J E A N
M. PARKS

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. BEAUFILS;;.... Informatique
M. CASTAGNETTO.L. Mathématiques E.N.S.E.I.H.T.
M. DARROZES..... Mécaniques
M. OLIVIER..... Mathématiques
Mlle BARBANCE.. Mathématiques

PERSONNEL DE LA FACULTE AFFECTE A L'INSTITUT NATIONAL DES SCIENCES APPLIQUEES DE TOULOUSE

PROFESSEURS SANS CHAIRE

M. CASSIGNOL..... Génie électrique
M. COLETTE..... Physique

MAITRES DE CONFERENCES

M. FAGET..... Physique .
M. TRUCHASSON.... Mécanique.
M. SCHUTTLER..... Physique.
M. ROQUES..... Chimie.

M. MIRA..... Génie électrique.
M. GRATELOUP..... Génie électrique.

M. LETURCQ;;;;; Génie électrique.
M. SIRIEYS..... Génie civil
M. MASO..... Génie civil
M. DURAND.G.... Chimie.
M. CARRARA..... Physique.
M. CUPPENS..... Mathématiques.

PERSONNEL AFFECTE A L'INSTITUT UNIVERSITAIRE DE TECHNOLOGIE DE TOULOUSE

MAITRES DE CONFERENCES

M. MARTIN..... Génie électrique
M. THENOZ..... Minéralogie
M.PERENNOU..... Informatique.

CHARGES D'ENSEIGNEMENT

M. REY..... Génie électrique

SECRETARIAT

A MES PARENTS

A MA FEMME

A MES FILS

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41543906_0007

A

Monsieur le Professeur Emile DURAND

Doyen honoraire de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse

Directeur de l'Institut de Calcul Numérique

Président du Conseil de Gestion du Laboratoire de Physique Mathématique

Hommage de gratitude et de profond respect.

R E M E R C I E M E N T S

Qu'il nous soit permis de saisir cette occasion solennelle pour dire tout ce que nous devons à Monsieur le Doyen Emile DURAND. Depuis le jour, déjà lointain, où il nous accueillit dans son laboratoire nous avons été séduit par la simplicité de son abord et la bienveillance de ses entretiens. Etonné sans cesse par la profondeur de ses connaissances en les domaines les plus larges, nous avons été stimulé dans notre travail pour essayer de parvenir à dialoguer à son niveau. Encouragé par ses conseils et aidé par ses nombreuses indications, voire par ses propres documents manuscrits qu'il a eu souvent la bonté de nous confier, nous avons eu le bonheur de mener à bien quelques études que pour la plupart il nous a lui-même suggérées.

Par dessus tout nous tenons à lui témoigner notre reconnaissance pour la confiance - qu'alors même et pendant longtemps, nous n'étions qu'un simple étudiant peinant pour s'initier à la recherche - il a bien voulu nous consentir, n'hésitant pas par exemple à nous confier la charge de travaux dirigés dans un enseignement pratiquement nouveau pour nous. En nous disant "vous étudierez", il nous a fait entrevoir cette grande leçon de modestie du véritable savant selon laquelle la carrière somme toute n'est qu'un constant apprentissage.

Tout cela, auquel il faudrait ajouter les grandes commodités matérielles de bibliothèque, etc... nous font mesurer comme un privilège rare l'honneur de travailler auprès de lui, et ne nous fait aspirer qu'à continuer de bénéficier de sa direction et de sa bienveillance.

Messieurs les Professeurs J.M. MERIC et P. GAUTIER, dont nous nous souvenons toujours avec plaisir qu'ils nous ont enseignés, et avec lesquels nous avons l'honneur aujourd'hui de collaborer dans

les enseignements dirigés de Mathématique et de Physique, ont bien voulu marquer l'intérêt qu'ils prennent à nos travaux en acceptant de nous faire l'honneur de participer à notre jury.

Nous les prions de trouver ici, nos vifs remerciements et l'expression de notre déférente gratitude.

Nous tenons à associer également dans nos remerciements tous les maîtres de la Faculté qui nous ont enseignés, MM. Les Professeur DELTHEIL, COMBES, HURON, LAFOURCADE, FERT, CASTAING, PERRIER, LAUDET, MATHIS.

Ils nous ont donné un ensemble des connaissances que nous espérons faire fructifier dans nos travaux.

On nous permettra d'ajouter à l'areopage de nos maîtres, ceux qu plus anciennement nous ont guidé et conduit vers l'enseignement supérieur. Nous pensons avec émotion et reconnaissance à Monsieur l'Instituteur VILLEMUR, au regretté Directeur du Petit Lycée de Toulouse, le bon Monsieur RIBES, à MM. les Professeurs de Mathématiques TAPIE et BARRES.

Enfin nous présentons nos remerciements à Mmes BAYLAC, BADIA, FERRAN qui ont assuré la préparation de nos divers manuscrits et à MM. CANAC et NOUGAILHON qui en ont réalisé l'illustration et le tirage.

D'une manière générale nous tenons à remercier également l'ensemble de nos camarades et collègues de l'Institut de Calcul Numérique, notamment le Secrétariat, qui par leur aide et amitié nous ont apporté un concours à tous égards précieux.

NOTES AUX COMPTES RENDUS ET PUBLICATIONS A L'INSTITUT DE CALCUL NUMERIQUE DE TOULOUSE FAISANT L'OBJET DE LA SYNTHESE PRESENTEE EN CE MEMOIRE.

A. LEVY — Electrostatique. "Influence d'un multipole axial et diamétral d'ordre n, sur une sphère conductrice portée au potentiel zéro".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.263, p.119-121, Série B

A. LEVY — Electrostatique. "Influence d'un multipole axial et diamétral d'ordre n, sur une sphère dielectrique".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.263, p.523-526, Série B

A. LEVY — Electrostatique. "Influence sur une sphère conductrice ou dielectrique d'un multipole de degré n, le plus général".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.263, p.1054-1056, Série B

A. LEVY — Physique Mathématique. "Séries de Laplace pour les dérivées partielles de $\frac{1}{r}$ (relativement aux coordonnées). Applications au tenseur du multipole d'ordre n, en Electrostatique : expression de ses composantes sphériques en terme de ses composantes cartésiennes".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.264, p.538-540, Série A

A. LEVY — Mécanique Relativiste. "Développement en série de Fourier, de la loi horaire de l'oscillateur linéaire relativiste".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.268, p.353-355, Série A

A.LEVY — Mécanique Relativiste. "Généralisation relativiste, pour la rosette de Sommerfeld des développements en série de Fourier donnés par Lagrange (1770) et Bessel (1824) pour le mouvement elliptique keplerien classique".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.268, p.1069-1072, Série A

A. LEVY — Mécanique Quantique. "Mouvement du centre de gravité d'un paquet d'ondes centré sur les grands nombres quantiques n, ℓ, pour une particule de masse μ, à l'intérieur d'une sphère de rayon a".
C.R.Acad.Sc. Paris, t.269, p.277-280, Série B

A. LEVY — Physique Mathématique. "Extension du formulaire de Lommel (1879) par la généralisation de la récurrence de Schafheitlin (1906) pour le calcul d'intégrales où figure le produit de deux fonctions de Bessel, de 1ère ou 2ème espèce, d'ordres et d'arguments égaux ou différents"
C.R.Acad.Sc. Paris, t.269, p.609-612, Série A

A. LEVY — Mécanique quantique. "Mouvement du centre de gravité d'un paquet d'ondes centré sur les grands nombres quantiques n, ℓ, pour une particule de masse m, dans un champ coulombien attractif $U = \frac{K}{r}$, K 0."
C.R.Acad.Sc. Paris, t.269, p.789-792, Série B (29 octobre 1969)

A. LEVY — "Contribution à l'étude de l'expansion multipolaire en Physique. I. Electrostatique . Polarisation des harmoniques sphériques solides, réguliers ou irréguliers. Application au potentiel d'un multipole et à l'énergie mutuelle de deux multipoles en Electrostatique."
Publication à l'I.C.N.T. Section 1, n°12, 1967 (in quarto 110 pages)

A. LEVY — "Le problème de Kepler en Mécanique Classique et en Relativité Restreinte". Comparaison systématique et détaillée des traitements classique et relativiste du problème de Kepler. Généralisation relativiste des formules de Lagrange (1770) et de Bessel (1819) pour le "mouvement elliptique des Planètes".
Publication à l'I.N.C.T., section 1, n°15, 1969 (in quarto 120 pages)

A. LEVY "Contribution à l'étude des fonctions de Bessel." Extension du formulaire de Lommel (1879) concernant les intégrales où figure le produit de deux fonctions de Bessel d'espèces, d'indices et d'arguments différents par l'élaboration de méthodes de récurrence nouvelles généralisant la méthode de Schafheitlin (1906). Application au calcul des éléments de matrice en Mécanique Quantique.
Publication [illegible], section 1, n°17, 1969 (in quarto, 90 pages).

A. LEVY "L'approximation Classique en Mécanique Quantique ou Illustration de l'emploi des Fonctions Spéciales en Physique Mathématique"
Publication à l'I.C.N.T., section 1, n°16, 1969 (en 2 tomes, [illegible] pages).

I N T R O D U C T I O N

Nous nous sommes intéressés dans le travail à des problèmes de Physique Mathématique provenant de trois secteurs importants : électricité, relativité, quanta.

La nature de notre contribution en ces matières est la recherche de la solution analytique exacte des problèmes posés.

Nous pensons en effet que malgré l'énorme développement théorique des sciences depuis plusieurs décades, ce type de recherche n'est pas périmé. Nous aurions même tendance à penser le contraire. Plus la science s'accroit plus on a besoin de tester sa cohérence avec elle même, plus il est nécessaire de bien asseoir ses raccordements avec les parties qui précèdent. En outre il reste toujours des problèmes - au traitement analytique délicat - négligés des mathématiciens et délaissés par les physiciens, qui appellent encore des solutions analytiques exactes.

C'est vers des problèmes de cette nature que nous nous sommes tournés et c'est ainsi que, faisant appel à la théorie et au formulaire des fonctions spéciales (qu'ils invoquaient irrésistiblement) nous avons pu en résoudre un certain nombre.

Dans la première partie, consacrée à des problèmes d'Electrostatique nous donnons des solutions exactes de problèmes d'influence inédits. On sait ordinairement qu'une charge simple devant une sphère conductrice au potentiel zéro y suscite une charge image de signe opposé et située au point conjugué.

Le calcul se fait au moyen de la formule d'inversion spatiale de Lord Kelvin. Mais celle ci était loin en l'occurence d'avoir épuisé

ses virtualités. C'est ce que par conséquent nous lui avons fait faire en examinant d'une manière systématique et générale, l'influence d'un dipôle, d'un quadripôle etc...

Commençant par des multipôles de révolution dont l'axe passe par le centre de la sphère, nous avons obtenu, en application de certaines propriétés des harmoniques sphériques solides irréguliers ou réguliers, les images comme suite elles mêmes de multipôles d'ordre inférieur ou égal à celui du multipôle influençant.

Considérant ensuite plus généralement un multipôle non axial, nous avons pu aussi en constituer, sous une forme analogue, les images. Enfin pour généraliser une dernière fois, plus pleinement, nous avons examiné le cas d'une sphère dielectrique. Nous avons pu constituer alors les images d'un multipôle quelconque. Elles consistent en deux suites dont l'une en retour, est évanescente lorsque la sphère redevient conductrice et l'autre restitue la solution afférente à ce cas et déjà obtenue.

Dès lors la formule de l'inversion spatiale avait fourni tout ce qu'elle pouvait fournir. Monsieur le Doyen Durand nous a fait, pour ces résultats, les honneurs de son livre "Magnétostatique" (Masson 1968, p. 160).

Intéressé dès lors par ces notions de multipôles nous avons été désireux d'en approfondir la théorie. Aussi lui avons nous consacré toute une étude résumée dans la suite de cette "Première Partie".

En section 1, nous envisageons, in abstracto, le soubassement mathématique de la théorie. Tout repose sur "l'opérateur de polarisation", pour lequel une décomposition canonique - qui permettra le passage des coordonnées cartésiennes aux sphériques - a été recherchée.

En section 2, nous étudions le "processus de polarisation" des harmoniques irréguliers. A cet égard nous y généralisons la célèbre

formule d'Hobson que nous interprétons dans notre théorie comme le processus de polarisation de $\frac{1}{R}$ seulement.

Grâce à notre décomposition canonique préalable de l'opérateur de polarisation nous sommes à même ensuite de former la "série de Laplace" de tout "harmonique polarisé".

En section 3 nous étudions le processus de polarisation des harmoniques réguliers. Et de même, nous y établissons des formules du type "Hobson" les concernant, en systématisant et généralisant cette conception dont par ailleurs on peut trouver les éléments, dans Robin, notamment.

En section 4 nous abordons les applications de ces notions en Electrostatique. Avant même de rien faire tout est virtuellement résolu, grâce au travail purement mathématique préparatoire : le potentiel d'un multipôle c'est un "harmonique solide irrégulier polarisé", résultat de l'application à $\frac{1}{R}$, harmonique solide irrégulier fondamental, de notre "opérateur de polarisation".

Le problème de la correspondance des composantes cartésiennes et sphériques du multipôle est lui aussi désormais immédiat, par nos préalables mathématiques sur la polarisation de $\frac{1}{R}$ et la série de Laplace correspondante.

En section 5 nous poursuivons dans les applications en étudiant le problème de l'énergie mutuelle de deux multipôles : elle nous est apparue comme le résultat d'un "processus de double polarisation" de $\frac{1}{R}$. Grâce à cette façon de voir d'ailleurs, nous avons pu ramener le problème d'influence de deux multipôles quelconques à celui d'une charge et d'un certain "multipôle produit" totalement fictif bien sûr.

Enfin, en section 6, nous avons essayé d'illustrer nos théories par des exemples connus ou inédits où nous calculons l'énergie mutuelle et l'interaction de deux systèmes, par nos méthodes de décomposition multipolaire : forces entre deux multipôles finis, forces exercées par une sphère conductrice sur un anneau influençant.

Pour terminer en section 7 nous dressons un catalogue de formules vectorielles pour l'interaction de deux multipôles, faisant appel à la "formule de Maxwell" qui est consubstantielle à la chose.

Monsieur P. Morse, du M.I.T. nous a promis lors de la prochaine réédition de son monumental MTP, de reprendre nos résultats en la matière.

Dans la seconde partie, nous nous sommes intéressés à des problèmes de dynamique relativiste. En premier lieu nous avons repris le problème de l'oscillateur harmonique relativiste pour lequel, nonobstant tous les travaux connus à ce jour le concernant nous avons pu obtenir des résultats inédits, à savoir l'expression de la période à partir d'un seule intégrale elliptique de Legendre complète de seconde espèce, et la série de Fourier (sous forme numérique il est vrai) de la solution.

Pour la particule dans le champ képlérien, en mouvement relativiste selon la rosette de Sommerfeld, notre contribution aura été plus importante et, sur le plan théorique, plus intéressante : nous y donnons en effet les séries de Fourier relativistes inédites, généralisant près de deux cent ans après, les séries de Fourier données par Lagrange lui même (1770) pour le même problème en traitement classique. Signalons, comme le précise Erdelyi, que ces séries de Fourier dites "séries de Lagrange pour le mouvement képlé-

rien", présentaient un intérêt historique, puisque c'est à l'occasion du calcul de leurs coefficients que Bessel (1824) a mis pour la première fois en évidence les fonctions qui portent son nom. Nous mêmes, reprenant la démarche même de Bessel, mettons en évidence comment ces fonctions apparaissent spontanément dans le calcul des coefficients de Fourier du problème relativiste, sous la forme de l'intégrale de Hansen.

Des astronomes, tel M. Kowaleswki du Bureau des Longitudes, des physiciens relativistes tels M. Arzelies lui même ont bien voulu nous dire l'intérêt qu'ils attachaient à nos résultats, que, pour ce dernier, il voudra bien reprendre dans la prochaine réédition de son excellent traité.

Dans la troisième partie nous nous sommes intéressés sur la suggestion de Monsieur le Doyen E. Durand au problème de"l'approximation classique en Mécanique Quantique".

Il s'agit en gros de relier traitement classique et traitement quantique d'un même problème mécanique. Malgré l'éloignement apparent des deux théories celle de Newton et celle de Schrodinger, un pont existe en effet entre les deux doctrines. Pont très étroit bien sûr mais si ténu soit-il qui relie néammoins deux étages quasi distincts de comportement. On conçoit dès lors tout l'intérêt qu'il y a de l'explorer. Le hiatus qui parait séparer les deux doctrines en est réduit d'autant.

Cette partie de notre travail plus que toute autre est illustrative des méthodes de la Physique Mathématique.

En effet réduites à leur formulation mathématique les deux théories paraissent bien s'opposer fortement : équations différentielles du second ordre pour Newton, équation d'évolution aux dérivées partielles pour Schrodinger ; déterminisme et trajectoire définie dans le premier cas probabilisme et dilution de la notion de trajectoire dans le second etc

La résolution des équations classiques conduit à des solutions périodiques développées en série de Fourier qui font appel à des fonctions relativement simples de l'Analyse ; au plus difficile des cas on voit apparaître des fonctions de Bessel (pour la particule dans le champ képlérien).

La résolution de l'équation de Schrodinger elle, fait intervenir les fonctions spéciales les plus complexes de l'Analyse, à savoir la fonction hypergéométrique ou sa version dégénérée la fonction hypergéométrique confluente de Kummer.

Essayer de retrouver le traitement classique à l'intérieur du traitement quantique revient, en définitive, en ayant transposé le problème en les termes qui précédent, à extraîre les solutions classiques (type fonction de Bessel) des solutions quantiques (type Fonction hypergéométrique).

Ce simple énoncé schématique de notre propos suffit à en caractériser la difficulté.

Nous y sommes parvenus toutefois aidés par les comportements asymptotiques des fonctions puisque c'est dans ces conditions asymptotiques que s'opère précisément le rapprochement classique $\overset{+}{\rightarrow}$ quantique.

Notre exposé dès lors s'articule en quatre temps.

- Au chapitre VI, nous rappelons les solutions (et au besoin nous les donnons) pour certains problèmes mécaniques où une solution périodique existe. Ces exemples sont l'oscillateur linéaire (problème extrêmement simple mais sur lequel nous avons voulu opérer en profondeur), l'oscillateur spatial (sa généralisation naturelle, où seules des orbites fermées elliptiques apparaissent), la particule dans le champ képlérien (problème fondamental tant sur le plan classique que quantique, pour lequel toutes les coniques sont trajectoires possibles, mais dont seules les ellipses seront retenues).

Enfin nous avons étudié le problème de la particule libre dans le trou sphérique.: c'est un problème extrêmement simple en traitement classique, la trajectoire est une ligne polygonale plane régulière, inscrite dans un grand cercle de la sphère creuse qui emprisonne la particule, mais c'est un problème très intéressant sur le plan quantique : il s'y agira en effet d'un des tout premiers exemples de résolution de l'équation de Schrödinger en coordonnées sphériques (de suite après les problèmes dans l'espace illimité).

Il était donc intéressant d'en faire la théorie comme d'ailleurs nous le recommandait Monsieur le Doyen E. Durand. Excellente suggestion puisque cet exemple d'apparence bénin donc nous a été extrêmement fructueux. En effet c'est à son sujet que nous avons été amené à étendre le "formulaire de Lommel" par"la généralisation de la récurrence de Schafheitlin", contribution donc à l'étude des fonctions de Bessel, qui sitôt publiée aux Comptes Rendus nous a valu une avalanche de demande de notes, et notamment du "Zentralblatt für Mathematik" qui nous invite à la publier dans ses colonnes.

Les fonctions de Bessel, omnipresentes en Physique, apparaissent en effet aussi dans cet exemple et un problème d'extension de leur théorie nous a été posé pour pouvoir conduire notre étude à bien.

Au total dans ce chapitre III nous rappelons le traitement classique en le donnant précisément sous la forme de Séries de Fourier que d'ailleurs nous préparons pour la suite en donnant aux énergies et moments les valeurs quantiques que le traitement quantique leur assignera ultérieurement.

Au chapitre VII précisément nous rappelons brièvement les traitements quantiques de ces problèmes. Pour l'oscillateur spatial notre rappel est un peu plus complet car il y a une mise en forme plus précise, rarement développée dans les manuels, qui nous a été nécessaire. Pour la particule dans le trou sphérique nous avons eu de même à préciser le calcul de la norme des fonctions d'onde, paragraphe omis pratiquement dans les manuels mais capital pour nous.

Pour l'atome d'hydrogène nous nous sommes bornés au spectre discret (ce qui correspond bien à un mouvement classique périodique).

° Au chapitre VIII nous avons, en vue du calcul des éléments de matrice, examiné les formulaires intégraux disponibles. Force nous a été de constater que pour conduire le calcul des éléments de matrice les plus généraux (et donc les extradiagonaux tout autant que les diagonaux) les formulaires disponibles dans la littérature sont absolument insuffisants.

Aussi avons nous apporté à l'extension de ces formulaires intégraux, toute notre attention et tous nos soins. C'est dans ces paragraphes que se trouve la justification de notre sous-titre : "Illustration de l'emploi des Fonctions Spéciales...". En effet sans ces extensions portant sur les fonctions d'Hermite, de Laguerre, de Bessel, nous n'aurions pu rien faire.

Utilisant la "méthode de la fonction génératrice" pour des raisons de simplicité de mise en oeuvre, dans le cas de polynômes orthogonaux, et la "méthode de récurrence" dans le cas des fonctions de Bessel, nous avons étendu successivement les formulaires portant sur les fonctions d'Hermite, sur les fonctions de Laguerre et les fonctions de Bessel.

Pour l'atome d'hydrogène on disposait d'un formulaire plus élaboré (le sujet, plus important, a stimulé davantage la recherche), celui de W. Gordon. Il consiste en une récurrence qui s'est avérée rapidement très laborieuse à mettre en oeuvre, c'est pourquoi nous avons repris ce problème en méthode de la fonction génératrice.

Pour l'oscillateur linéaire, on ne connaissait qu'un calcul par récurrence. Vu la simplicité du problème nous avons tenu à une explicitation générale. De même pour l'oscillateur spatial. Pour le dernier cas, nous avons donc étendu le formulaire de Lommel mais d'une manière telle qu'elle englobe ce formulaire, en annulant les méthodes de cet auteur. En effet ses formules sont contenues en puissance, et il est immédiat de les en sortir, dans une formule

de récurrence à 3 termes que nous avons élaborée.

On conviendra que cette technique revêt à la fois une certaine élégance et une certaine puissance. C'est cela sans doute qui aura retenu l'attention du Zentralblatt.

Au chapitre IX nous calculons les éléments de matrice diagonaux ou extradiagonaux de r, $\frac{1}{r}$, ou r^{2p} etc... Une large part de ces calculs est inédite et essaye d'aller aussi loin que possible.

Au chapitre X dès lors nous sommes en mesure de procéder au rapprochement des traitements classique et quantique. Il s'opère entre coefficients de Fourier classiques d'une part et éléments de matrice quantiques d'autre part.

Après des mises en forme adéquates et sous des conditions asymptotiques, nous sommes parvenus à chaque fois à établir la confluence à la limite des quantités mises en balance, cela dans des circonstances plus ou moins aisées plus ou moins laborieuses. Le cas notamment de l'atome d'hydrogène aura exigé une certaine persévérance vu la masse de calculs qu'il y aura fallu effectuer pour aboutir. Il est vrai que nous savions a priori qu'il"doit en être ainsi". Aussi perçant le tunnel par les deux bouts nous savions que tôt ou tard les deux traitements classique et quantique se rejoignaient. Cette conviction nous a soutenu. On mesurera néanmoins la complexité de tous les méandres des raisonnements qu'il a fallu tenir...

PREMIERE PARTIE

LES FONCTIONS SPECIALES EN ELECTROSTATIQUE

CHAPITRE I

LES PROBLEMES D'INFLUENCE DE MULTIPOLES PLACES DEVANT DES SPHERES

1 - *POSITION DU PROBLEME. INVERSION SPATIALE DE LORD KELVIN*

On considère une sphère conductrice de centre O, de rayon a, maintenue au potentiel zéro.

Soit $O\vec{z}$ un axe quelconque. Soient A et B deux points harmoniquement conjugués, de $O\vec{z}$. On pose OA = D, OB = d < D. On a $a^2 = dD$. Un point d'observation quelconque P est repéré par ses coordonnées sphériques de pôle O, A ou B - et d'axe Oz - soit, par (R,θ,φ), (ρ,ω,φ) ou (ρ',ω',φ).

Si la sphère est placée en présence d'un potentiel influençant $V_o(r,\theta,\varphi)$ la formule de Lord Kelvin [1] stipule que celui ci suscite des images qui créent pour leur part le potentiel :

$$\psi = -\frac{a}{R} V_o\left(\frac{a}{R},\theta,\varphi\right) \qquad (1)$$

On voit que la mise en oeuvre de cette formule nécessite que le potentiel influençant soit rapporté au pôle O.

Or si la source influençante est un multipôle placé en A, il n'en est pas ainsi.

C'est pourquoi l'on a besoin, au premier chef, des formules de changements d'origine pour les harmoniques sphériques (solides) qui correspondent à ces potentiels.

Bien heureusement de telles formules existent dans la littérature [2].

2 - *FORMULES DE CHANGEMENT D'ORIGINE POUR LES HARMONIQUES SPHERIQUES SOLIDES*

On a respectivement, pour les changements d'origine A → O, et O → A :

$$(2)\quad \rho^{-n-1}\, P_n^m(\cos\omega)e^{im\varphi} = \sum_{k=m}^{\infty} (-1)^{n-m}\left[D^{-n-k-1} C_{k+n}^{k+m}\right] R^k P_k^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (R < D)$$

$$(3)\quad \rho^{-n-1}\, P_n^m(\cos\omega)e^{im\varphi} = \sum_{k=n}^{\infty} \left[D^{k-n} C_{k-m}^{n-m}\right] R^{-k-1} P_k^m(\cos\theta)e^{im\varphi} \qquad (R > D)$$

$$(4)\quad R^n\, P_n^m(\cos\theta)e^{im\varphi} = \sum_{k=m}^{n} \left[D^{n-k} C_{n+m}^{k+m}\right] \rho^k P_k^m(\cos\omega)e^{im\varphi}$$

On note que la 3ème sommation est une somme finie. Cela aura des incidences sur la détermination des images. Précisons que ces 3 formules de principe vont faire l'objet d'applications adaptées au problème (c'est ainsi par exemple que (3) sera utilisée en fait pour le changement B → O, et (4), pour le changement P → B).

3 - *ELEMENTS DE REDUCTION MULTIPOLAIRES EN O, D'UN MULTIPOLE PLACE EN A*

La formule (3) est justiciable d'une interprétation physique qui va s'avérer déterminante pour la suite de notre étude.

Considérons le potentiel :

$$(5)\qquad V_{n,m} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{h_{n,m}}{\rho^{n+1}} P_n^m(\cos\omega)e^{im\varphi}$$

Il correspond à un multipôle, "d'ordre n et de degré m", de grandeur $h_{n,m}$ placé en A.

D'après (3) on peut écrire :

$$(6)\qquad V_{n,m} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} g_{nm}^{(k)} \frac{P_k^m(\cos\theta)}{R^{k+1}} e^{im\Phi} \qquad (\Phi = \varphi)$$

On y reconnait une superposition de potentiels qui, de par leur structure même, (il suffit de comparer à (5)) ne sont autres eux mêmes, que ceux de multipôles du même type que le multipôle (5), à savoir de degré k ($k \geq n$), d'ordre m, et de grandeur :

$$\left[D^{k-n}\, C_{k-m}^{n-m}\right] h_{nm} \qquad K = n, n+1,$$

On peut dès lors énoncer la règle d'équivalences suivante :

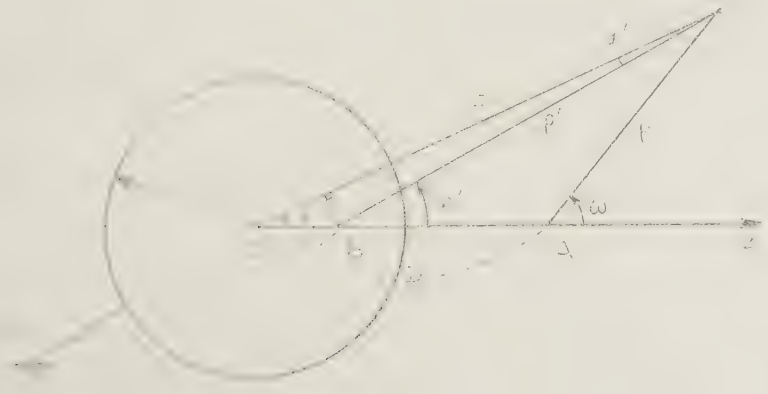
"Un multipôle "de degré n et d'ordre m" (c-à-d correspondant à l'harmonique tesserale de première espèce $P_n^m(\cos\omega)e^{im\varphi}$) et de grandeur h_{nm}, sis en un point A, est équivalent, pour ce qui est de la région R > D, à une suite infinie de multipôles sis en O, de même ordre m, de degrés k supérieur au n. en. et de grandeurs $g_{nm}^{(k)}$ liées à sa grandeur h_{nm} par (7), qui ne fait intervenir que la distance entre le point où est situé le multipôle, et le point où sont situés les multipôles fictifs équivalents".

Notons qu'inversement une certaine suite infinie de multipôles de même ordre m, sis en un même point, peut, si les conditions précédentes, de grandeurs, sont satisfaites, être réduite à un seul multipôle placé en un autre point.

C'est évidemment dans ce sens, de réduction d'une suite infinie de multipôles de même ordre et de degré croissants, à un multipôle unique, sis ailleurs, que nous ferons jouer cette règle.

- RELATIONS AUXILIAIRES POUR LE CHANGEMENT D'ORIGINE DE A EN O, et O EN B

Reportons nous à la figure ci-dessous :



On y voit aisément les résultats suivants :

$$(8) \qquad \rho = \left[R^2 + D^2 - 2\,DR\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(9) \qquad \rho' = \left[R^2 + d^2 - 2\,dR\cos\theta\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$(10) \qquad \cos\omega = \frac{R\cos\theta - D}{\rho}$$

$$(11) \qquad \cos\alpha' = \frac{d\cos\theta - R}{\rho'} \quad \text{ou} \quad \cos\alpha' = \frac{\rho' + d\cos\omega'}{R}$$

Ainsi (8) et (10) fournissent $\rho = \rho(R,\theta)$, $\omega = \omega(R,\theta)$.

La formule de Lord Kelvin exige la formation de $\rho(\frac{a^2}{R},\theta)$ et $\omega(\frac{a^2}{R},\theta)$.

On vérifie aisément qu'il vient :

$$(12) \qquad \rho(\frac{a^2}{R},\theta) = \frac{D}{R}\left[d^2 + R^2 - 2\,dR\cos\theta\right]$$

soit, d'après (9) :

$$(13) \qquad \rho(\frac{a^2}{R},\theta) = \frac{D}{R}\,\rho'(R,\theta)$$

De même on a aisément :

$$(14) \qquad \cos\left[\omega(\frac{a^2}{R},\theta)\right] = \frac{d\cos\theta - R}{\rho'(R,\theta)}$$

On reconnait :

$$(15) \qquad \cos\left[\omega(\frac{a^2}{R},\theta)\right] = -\cos\alpha' = -\frac{\rho' + d\cos\omega'}{R}$$

Les formules (13) et (15) permettent donc de passer de ρ,ω à R,θ, et mieux, (pour la détermination des images qui seront en effet en B), à ρ', ω'

I - IMAGES D'UN UNIPOLE SIS EN A

Considérons le cas le plus simple, d'une charge simple (unipole),

sise en A.

On a le potentiel influençant :

$$(16) \qquad V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{\rho}$$

Le potentiel de l'image s'écrit, en vertu de (1) et de (13) :

$$(17) \qquad \psi = -\frac{a}{R} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{q}{\rho(\frac{a^2}{R}, \theta)} = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} (-\frac{a}{D} q) \frac{1}{\rho'}$$

On l'identifie immédiatement comme celui d'une charge simple sise en B, de grandeur :

$$(18) \qquad Q' = -\frac{a}{D} q$$

6 - *IMAGES D'UN DIPOLE SIS EN A*

Le potentiel d'un dipôle, en A, s'écrit :

$$(19) \qquad V_o = \frac{P}{4\pi\varepsilon_o} \frac{\cos \omega}{\rho^2} \quad (\text{avec } p = \vec{p}.\vec{z} > 0)$$

D'après (1), (13) et (15), on a pour potentiel image :

$$(20) \qquad \psi = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} (\frac{a}{D^2} p) \frac{1}{\rho'} + \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a^3}{D^3} p \frac{\cos \omega'}{\rho'^2}$$

On identifie immédiatement les images, ce sont une charge $\frac{a}{D^2} p$ en B et un dipôle de même sens, de grandeur $\frac{a^3}{D^3} p$, également situé en B.

7 - *IMAGES D'UN MULTIPOLE AXIAL ET DIAMETRAL SIS EN A* [3]

Il est aisé, grâce à nos formules d'examiner le cas plus général d'un multipôle axial (ie, de révolution) et "diamétral" (ie, d'axe Oz).

Le potentiel d'un tel multipôle situé en A, s'écrit :

$$(21) \qquad V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} a_{no} \frac{P_n(\cos\omega)}{\rho^{n+1}}$$

D'après la formule de Lord Kelvin et nos auxiliaires, on aura pour image :

$$\psi = \frac{(-1)^{n+1}}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a}{D^{n+1}} a_{no} \frac{R^n P_n(\cos \alpha')}{\rho'^{n+1}} \tag{22}$$

Utilisons la formule (4) pour m = 0 et pour le changement d'origine de P en B, concernant le point O lui même. (Il est repéré sur P par R, α' et sur B, par d, ω', la distance des origines P, B étant ρ').

Il vient :

$$R^n P_n(\cos \alpha') = \sum_{k=0}^{n} C_n^k d^k \rho'^{n-k} P_k(\cos \omega') \tag{23}$$

Portant dans (22), on a :

$$\psi(\rho', \omega') = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} b_{ko} \frac{P_k(\cos \omega')}{\rho'^{k+1}} \tag{24}$$

avec :

$$b_{ko} = (-1)^{n+1} C_n^k \frac{a^{2k+1}}{D^{n+k+1}} a_{no} \qquad k = 0, \ldots n \tag{25}$$

On reconnait immédiatement dans (24), les potentiels d'une suite de multipôles, tous d'ordre 0 à l'instar du multipôle influençant et présentant tous les degrés 0, 1, 2,...n, inférieurs ou égal de celui ci.

Ainsi une charge suscitera une charge image, un dipôle suscitera une charge et un dipôle (cf supra), un quadripôle suscitera une charge, un dipôle et un quadripôle etc...

Enonçons la règle générale que nous avons obtenue :

> Un multipôle d'ordre 0 et de degré n, de grandeur a_{no}, (axial et diamétral) sis devant une sphère de rayon a, à la distance D de son centre, suscite une suite <u>finie</u> d'images, constituée de n+1 multipôles d'ordre 0 également, de degrés k allant de 0 en n, et de grandeurs
>
> $b_{ko} = (-1)^{n+1} C_n^k \frac{a^{2k+1}}{D^{n+k+1}} a_{no}$

8 - *IMAGES D'UN MULTIPOLE D'ORDRE m et de degré m, sis en A* (4)

Donnons enfin la solution du cas le plus général, de l'influence d'une sphère conductrice (au potentiel 0) par un multipôle quelconque (ni axial, ni donc diamétral) de degré n et d'ordre m. Son potentiel s'écrit :

$$V_o = \frac{a_{nm}}{4\pi\varepsilon_o} \frac{P_n^m(\cos\omega)}{\rho^{n+1}} e^{im\varphi} \tag{26}$$

D'après (1), (13) et (15), on a aussitôt pour potentiel image :

$$\psi = \frac{(-1)^{n+m+1}}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a}{D^{n+1}} a_{nm} \frac{R^n P_n^m(\cos\alpha')}{\rho'^{n+1}} e^{im\varphi'} \qquad (\varphi' \equiv \varphi) \tag{27}$$

Utilisant (4) pour le report d'origine de P en B, concernant O lui même, on a :

$$R^n P_n^m(\cos\alpha') = \sum_{k=m}^{n} C_{n+m}^{k+m} d^k \rho'^{n-k} P_k^m(\cos\omega') \tag{28}$$

D'où :

$$\psi = \sum_{k=m}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} b_{km} \frac{P_k^m(\cos\omega')}{\rho'^{k+1}} e^{im\varphi'} \tag{29}$$

avec :

$$b_{km} = (-1)^{n+m+1} \frac{a^{2k+1}}{D^{n+k+1}} C_{n+m}^{k+m} a_{nm} \qquad k = m, \ldots n \tag{30}$$

On reconnait immédiatement dans (29) une suite de multipôles images, en nombre n-m+1, tous d'ordre m, à l'instar du multipôle influençant mais de degrés égal ou inférieurs. On a de façon précise la nouvelle règle suivante :

> Un multipôle d'ordre m et de degré n, de grandeur a_{nm}, suscite dans la sphère une suite finie d'images, constituée de n-m+1 multipôles eux aussi d'ordre m mais de degré k allant de m à n (et non de 0 à n), de grandeurs b_{km} données par (30).

9 - *IMAGES D'UN MULTIPOLE D'ORDRE m ET DE DEGRE n DANS UNE SPHERE DIELECTRIQUE.*

Notre étude peut s'étendre au problème de l'influence sur des sphères dielectriques.
Les résultats seront moins simples[4][5]. En effet on trouvera, en plus d'une suite finie d'images, situées en le point conjugué, une suite infinie, elle, d'images supplémentaires sises en O.

Toutefois nous avons pu montrer que cette suite supplémentaire est évanescente lorsque la perméabilité dielectrique de la sphère devient infinie, tandis que la 1ère série, elle, restitue entièrement la solution décrite plus haut, pour la sphère conductrice.

Nous avons exposé notre solution dans une première note [5], pour un multipôle d'ordre O.
Passons tout de suite à la solution pour le cas le plus général, d'un multipôle d'ordre m exposée dans une seconde note [4].

Le potentiel influençant s'écrit :

$$V_o = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} a_{nm} \frac{P_n^m(\cos\omega)}{\rho^{n+1}} \cos m\varphi \qquad (31)$$

Grâce à la formule (2), de changement d'origine A → O, il se réécrit :

$$V_o = \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} b_k R^k P_k^m(\cos\theta) \cos m\Phi \qquad (\Phi \equiv \varphi) \qquad (32)$$

avec :

$$b_k = (-1)^{n-m} C_{n+k}^{m+k} D^{-n-k-1} a_{nm} \qquad (33)$$

Sous cette forme, les formules [6] de Lord Kelvin pour l'influence sur une sphère dielectrique lui sont applicables terme à terme.
On sait en effet qu'à chaque terme $f_k(R,\theta)$ de (32) est associé le potentiel image ψ_k :

$$\psi_k(R,\theta) = -A_k \frac{a}{R} f_k\left(\frac{a}{R},\theta\right) \qquad (34)$$

avec :

$$A_k = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1 + \frac{1}{a}\left(\frac{f_k}{\frac{\partial f_k}{\partial R}}\right)_{R=a}} \tag{35}$$

En l'occurence, avec ici

$$f_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} b_k R^k P_k^m (\cos\theta) \cos m\varphi$$

il vient :

$$A_k = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1 + \frac{1}{k}} \tag{36}$$

que l'on peut réécrire pour des raisons qui apparaissent dans la suite :

$$A_k = \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \cdot \frac{\varepsilon_r - 1}{1 + k(\varepsilon_r + 1)} \tag{37}$$

On note d'ores et déjà que $A_k \to 1$ quand $\varepsilon_r \to$ [illegible] le premier terme devenant 1, le second terme étant alors évanescent.

Il vient par conséquent, compte tenu de la séparation du A_k en 2 parties :

$$\psi = \psi' + \psi'' = \sum_{k=m}^{\infty} \psi_k \tag{38}$$

avec

$$\psi' = \sum_{k=m}^{\infty} \psi'_k \quad ; \quad \psi'' = \sum_{k=m}^{\infty} \psi''_k \tag{39}$$

$$\psi'_k = \frac{}{4\pi\varepsilon_o} b'_{km} \frac{P_k^m(\cos\theta)}{R^{k+1}} \cos m\varphi \qquad (k \quad m, \quad \cdot) \tag{40}$$

$$\psi''_k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} b''_{km} \frac{P_k^m(\cos\theta)}{R^{k+1}} \cos m\varphi \qquad (k \quad m, \quad \cdot) \tag{41}$$

$$(42) \qquad b'_{km} = (-1)^{n-m+1} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} C_{n+k}^{m+k} \frac{a^{2k+1}}{D^{n+k+1}} a_{nm}$$

$$(43) \qquad b''_{km} = (-1)^{n-m} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} \frac{1}{1+k(\varepsilon_r+1)} C_{n+k}^{m+k} \frac{a^{2k+1}}{D^{n+k+1}} a_{nm}$$

On reconnait dans la suite (41) une suite infinie de multipôles d'ordres m, et de degrés supérieurs à m, tous situés en O. Cette suite est irréductible, mais au vu de (43), elle est évanescente quand $\varepsilon_r \to \infty$.

La suite (40) est elle aussi une suite infinie de multipôles d'ordres m sis en O.
Mais nous allons montrer qu'elle est réductible à une suite finie de multipôles en B.

On note en effet l'identité suivante :

$$(44) \qquad C_{n+k}^{k+m} = \sum_{\ell=m}^{\min(k,n)} C_{n+m}^{\ell+m} C_{k-m}^{\ell-m}$$

Elle permet d'écrire :

$$(45) \qquad b'_{km} = \sum_{\ell=m}^{\min(n,k)} g_{km}^{(\ell)} \qquad (k = m, \ldots \infty)$$

où :

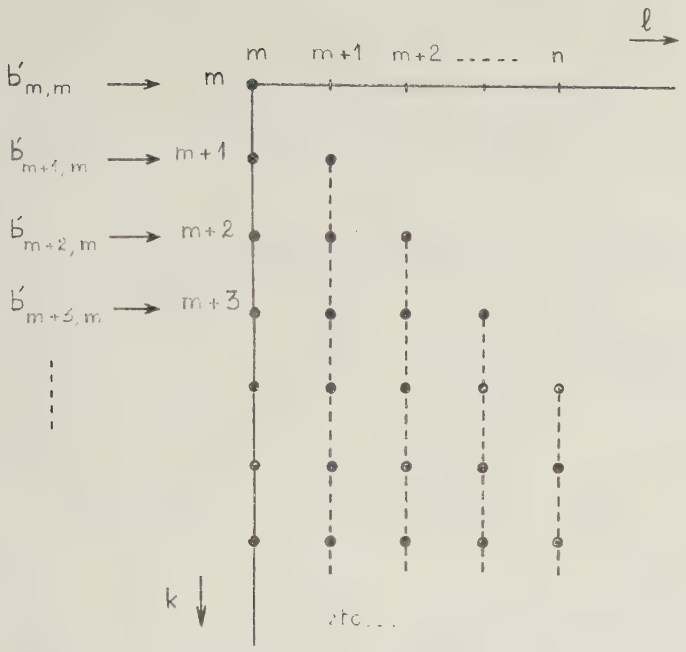
$$(46) \qquad g_{km}^{(\ell)} = h_{\ell m} d^{k-\ell} C_{k-m}^{\ell-m}$$

$$(47) \qquad h_{\ell m} = (-1)^{n-m+1} \frac{\varepsilon_r - 1}{\varepsilon_r + 1} C_{n+m}^{\ell+m} \frac{a^{2\ell+1}}{C^{n+\ell+1}} a_{nm}$$

On peut dès lors réécrire le potentiel image ψ' :

$$(48) \qquad \psi' = \sum_{k=m}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} h_{\ell m} d^{k-\ell} C_{k-m}^{\ell-m} \frac{P_k^m(\cos\theta)}{R^{k+1}} \cos m\varphi$$

Intervertissant les sommations sur k et ℓ, conformément au schéma matriciel ci après :



on a : $\sum_{k=m}^{\infty} \sum_{\ell=m}^{\min(n,k)} = \sum_{\ell=m}^{n} \sum_{k=\ell}^{\infty}$

D'où :

$$(49) \qquad \psi' = \sum_{\ell=m}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} h_{\ell m} \left\{ \sum_{k=\ell}^{\infty} \left| d^{k-\ell} \; C_{k-m}^{\ell-m} \right| \frac{P_k^m(\cos\theta)}{R^{k+1}} \cos m\Phi \right\}$$

Utilisant la formule (3) pour le changement d'origine O → B, on reconnait :

$$(50) \qquad \psi' = \sum_{\ell=m}^{n} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} h_{\ell m} \frac{P_\ell^m(\cos\omega')}{\rho'^{\ell+1}} \cos m\varphi' \qquad (\varphi' \equiv \Phi \equiv \varphi)$$

En définitive, on reconnait dans la première série d'images en O, une nouvelle série d'images en B, qui elle est <u>finie</u> : elle est constituée de (n-m+1) multipôles de même ordre m et de degrés ℓ de m à n, de grandeurs $h_{\ell m}$ données par (47).

En résumé, on peut énoncer la règle suivante :

L'image d'un multipôle de degré n, d'ordre m, de grandeur a_{nm}, dans une sphère dielectrique est constituée de 2 suites :

la 1^{e} suite est finie : ce sont n-m+1 multipôles sis en B d'ordre m, de degrés ℓ (de m à n) et de grandeurs $h_{\ell m}$ données par (47).

- la 2^{e} suite est infinie et située en O : les grandeurs des multipôles images sont les $b''_{k\,m}$ donnés en (43).

Lorsque la perméabilité ε_r tend vers l'infini la première suite - qui subsiste seule - tend vers la suite d'images obtenues pour la sphère conductrice (cf (47) & (30)).
La deuxième suite , elle, est alors évanescente.

La solution de ce problème restitue donc bien celle du problème précédent, pour la sphère conductrice.

Nota.

Nous reportant au schéma matriciel de sommation, on peut dire que les b'_{km} ont chacun été séparés en un certain nombre de termes, par (45).

$$b'_{mm} \qquad g^{(m)}_{mm}$$

$$b'_{m+1,m} \rightarrow g^{(m)}_{m+1,m} \qquad g^{m+1}_{m+1,m}$$

Ceci signifie que chaque multipôle de degré k a lui même été décomposé en un certain nombre de multipôles de degré k et d'ordre m.

Regroupant verticalement ces multipôles, on reconnait dans chaque colonne, les éléments de réduction en O d'un multipôle unique placé en B. En effet, grâce aux résultats du § 3, on reconnait par exemple dans les multipôles d'ordre m et de degrés croissants figurant dans la 1^{e} colonne, $\{g^{(m)}_{mm}, g^{(m)}_{m+1,m}, \ldots\}$ les éléments de réduction en O du multipôle unique h_{mm} en B, etc... etc...

On voit combien cette notion (que nous continuons d'utiliser par la suite) d'"éléments de réduction multipolaires" d'un multipôle est fructueuse : elle permet par des regroupements de sources, des réductions de celles ci.

CHAPITRE II

LES PROBLEMES D'ENERGIE MUTUELLE DE DEUX MULTIPOLES. THEORIE DE LA POLARISATION ET DE LA DOUBLE POLARISATION DES HARMONIQUES SPHERIQUES

INTRODUCTION

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'énergie mutuelle de deux multipoles. Cela nous a conduit à bien analyser ce qu'était lui même un multipole. A cet égard nous avons dû examiner les notions mathématiques qui sont consubstantielles à la chose : ce sont les procédés de "polarisation", des harmoniques sphériques selon la terminologie de Weyl. Le potentiel d'un multipole nous est apparu ainsi comme le résultat du processus de polarisation appliqué à $\frac{1}{R}$. Poursuivant dans cet ordre d'idées, nous avons alors présenté l'énergie mutuelle de deux multipoles comme le résultat d'une "double polarisation" de $\frac{1}{R}$. Le problème physique est ainsi strictement réduit à l'étude des propriétés de "l'opérateur de polarisation", ou "opérateur de différentiation multidirectionnelle"

Manipulant donc cet opérateur nous avons pu aisément traiter des problèmes annexes tel le problème de la correspondance des composantes "cartésiennes et sphériques" d'un multipole. A cet égard nous avons eu à manipuler la célèbre formule d'Hobson, que nous avons d'ailleurs généralisée pour des harmoniques sphériques solides de degré -n-1, puis de degré n

Nous avons développé ensuite, après une théorie de l'énergie mutuelle, quelques exemples concrets pour illustrer notre méthode de réduction multipolaire de calcul de l'énergie de deux systèmes

Enfin nous rappelons la "formule de Maxwell" et montrons tout son intérêt en nos problèmes.

SECTION 1

LA DIFFERENCIATION MULTIDIRECTIONNELLE DES OPERANDES HARMONIQUES

1 - DEFINITION DE NOMBRES L

Nous définissons les nombres L suivants

$$(1) \qquad L_m^p(s) = \sum_u (-1)^u C_s^u C_m^{p-u}$$

La sommation est étendue à toutes les valeurs de u assurant aux combinaisons une valeur définie non nulle Si l'on permute m et s, le signe est multiplié par $(-1)^p$.

Ces nombres procèdent de la fonction génératrice :

$$(2) \qquad (1+t)^m (1-t)^s = \sum_{p=0}^{m+s} L_m^p(s)\, t^p$$

2 - DECOMPOSITION D'UNE FORME HOMOGENE BIDIMENSIONNELLE

On considère la forme homogène à 2 variables, du type le plus simple

$$(3) \qquad \phi(x,y) = x^\lambda y^\mu \qquad (\lambda,\mu, \text{ entiers positifs})$$

Posant

$$(4) \qquad \zeta = x + iy \quad ; \quad \zeta^* = x - iy$$

on a

$$(5) \qquad \phi = \frac{1}{2^{\lambda+\mu}\, i^\mu}\, \zeta^{\lambda+\mu} \left(1 + \frac{\zeta^*}{\zeta}\right)^\lambda \left(1 - \frac{\zeta^*}{\zeta}\right)^\mu$$

On voit dès lors comment la formule (2) intervient. Posant :

$$(6) \qquad b_{m\lambda\mu\nu} = \frac{i^{\frac{m-|m|}{2}}}{2^{\lambda+\mu}\, i^\mu\, sg(m)}\, L_\mu^{\frac{m-|m|}{2}}(\lambda)$$

$$(7) \qquad \phi_m(x,y) = \left\{ x + i\, sg(m)\, y \right\}^{|m|}$$

on vérifie aisément (après le changement d'indice de sommation, $m = \lambda+\mu - 2p$) que la forme ϕ se décompose au moyen des formes $\phi_m(x,y)$, considérées comme fondamentales, selon la formule.

$$(8) \qquad x^\lambda y^\mu = \sum_m (-1)^{\frac{\lambda+\mu-|m|}{2}} b_{m\lambda\mu\nu} (x^2+y^2)^{\frac{\lambda+\mu-|m|}{2}} \left\{x+i\ sg(m)y\right\}^{|m|}$$

où m court de 2 en 2, de façon que $|m| \leq \lambda+\mu$.

3 - DECOMPOSITION D'UNE FORME HOMOGENE DE DEGRE n, A TROIS VARIABLES, z, LIEES PAR $x^2+ y^2+z^2 = 0$.

Si on considère la forme $\phi(xyz) = x^\lambda y^\mu z^\nu$, où $\lambda+\mu+\nu = n$ et où $x^2+ y^2+ z^2 = 0$, écrivant :

$$(9) \qquad - z^2 = (x^2 + y^2)$$

$$(10) \qquad \phi_{n,m}(xyz) = z^{n-|m|}\phi_m(xy)$$

on obtient aisément la décomposition "canonique", selon les formes fondamentales ϕ_{nm} :

$$(11) \qquad x^\lambda y^\mu z^\nu = \sum_m b_{m\lambda\mu\nu}\phi_{nm}(xyz)$$

4 - NOTION DE FORME HOMOGENE DE DEGRE n, DEFINIE PAR AXES. EXPRESSION ORDONNEE.

Etant donnés n axes $\vec{h}_1, \vec{h}_2, \ldots, \vec{h}_n$, on définit à partir d'eux une forme homogène de degré n, par la formule :

$$(12) \qquad f_n(xyz) = \prod_k^{1,n} (\vec{h}_k \cdot \vec{R})$$

où

$$(13) \qquad \vec{R} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

On l'ordonne aisément, au moyen "de la méthode multinomiale de sommation [7]". Il vient

$$(14) \qquad f_n = \sum_{\lambda=0}^{n} \sum_{\mu=0}^{n-\lambda} a_{\lambda\mu\nu}\, x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu} \qquad (\lambda+\mu+\nu = n)$$

avec

$$(15) \qquad a_{\lambda\mu\nu} = \frac{n!}{\lambda!\mu!\nu!}\, H(\lambda,\mu,\nu)$$

$$(16) \qquad H(\lambda,\mu,\nu) = H_{\underbrace{11\ldots1}_{\lambda}\ \underbrace{22\ldots2}_{\mu}\ \underbrace{33\ldots3}_{\nu}}$$

$$(17) \qquad H_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{n!} \sum h_{j_1 i_1}\, h_{j_2 i_2} \ldots h_{j_n i_n}$$

où $h_{j_1 i_1}$ désigne la composante i_1 du vecteur n° j_1, et où la sommation est étendue aux n! permutations $j_1 j_2 \ldots j_n$

5 - *DECOMPOSITION "CANONIQUE" D'UNE FORME HOMOGENE, DEFINIE PAR N AXES, A VARIABLES xyz LIEES PAR $x^2+y^2+z^2 = 0$.*

On se propose ici de décomposer une forme (12) écrite en son expression ordonnée (14). Utilisant la décomposition de base (11) pour $x^{\lambda} y^{\mu} z^{\nu}$, on trouve aisément :

$$(18) \qquad f_n(xyz) = \sum_{m=-n}^{n} d_m\, \phi_{nm}(xyz)$$

avec

$$(19) \qquad d_m = \sum_{\mu} \sum_{\lambda} a_{\lambda\mu\nu}\, b_{m\lambda\mu}$$

où λ varie de 1 en 1, entre 0 et $n - \varepsilon(n-|m|)$, et μ varie de 2 en 2 entre μ_o et μ_F, avec $\mu_F = n - \lambda - \varepsilon(n-|m|)$ et μ_o égal à $|m| - \lambda$ si $\lambda \leqslant |m|$ et à $\varepsilon(\lambda-|m|)$ si $\lambda > |m|$. $\varepsilon(N)$ désigne l'indicateur de parité du nombre. La formule (18) lorsque x,y,z seront respectivement par $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial z}$ deviendra la <u>formule clef de notre étude</u>.

6 - *RETOUR EN REEL ET INTERPRETATION. MISE EN EVIDENCE DES AXES DES HARMONIQUES SPHERIQUES.*

Opérant le retour en réel, nous avons pu réécrire (8) la forme f_n sous la forme :

$$f_1(xyz) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \, 2^{2p} \left\{ \alpha_{2p} F_1(xyz) + \beta_{2p} F_2(xyz) \right\}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-1}{2}\right]} (-1)^p \, 2^{2p+1} \left\{ \alpha_{2p+1} F_3(xyz) - \beta_{2p+1} F_4(xyz) \right\}$$

$$\alpha_m = \alpha_m + i \beta_m$$

F_1, F_2, F_3, F_4 désignent des formes définies par n axes, dont un certain nombre, n-m, sont portés par Oz, les m autres étant situés dans le plan z = 0 et y étant régulièrement espacés de $\frac{\pi}{m}$, le premier faisant avec Ox un certain angle θ. On aura :

pour F_1 : $m = 2p$ $\theta = \frac{\pi}{4\pi}$; pour F_2 : $m = 2p$ $\theta = 0$

pour F_3 : $m = 2p+1$ $\theta = 0$; pour F_4 : $m = 2p+1$ $\theta = \frac{\pi}{4p+2}$

On reconnaît dans ces dispositifs d'axes ceux là mêmes qui servent (selon la Théorie de Maxwell [9]) à caractériser les harmoniques sphériques. Aussi faut-il noter que c'est à ce simple stade de l'étude (recherche des formes canoniques d'une forme homogène) qu'ils apparaissent spontanément.

On doit interpréter en outre (18) ou (20) comme une décomposition "canonique" puisque toute forme f - quels que soient les axes qui la caractérisent - est référée à un quatuor de formes fondamentales dont les axes sont bien définis. Seuls les coefficients de la pondération font intervenir les axes $\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n$, au moyen de (21), (19), (15) et (6).

- *DEFINITION DE L'OPERATEUR DE POLARISATION.*

Définissons à l'instar de H. Weyl [10] le processus de polarisation comme étant le résultat de l'application à un opérande harmonique (le plus souvent $\frac{1}{R}$, mais pas toujours) de l'opérateur dit "opérateur de polarisation" défini de la façon suivante :

(22) $$\hat{O} = \prod_{k=} h_k \vec{\nabla}$$

où $\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n$ sont n vecteurs donnés et où $\vec{\nabla}$ désigne l'opérateur "nabla" ou "gradient".

8 - *DECOMPOSITION CANONIQUE DE L'OPERATEUR DE POLARISATION*

Utilisons à présent nos préliminaires sur les formes homogènes. On peut en effet considérer l'opérateur $\hat{O}$, comme une forme homogène $f_n\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$ des trois "variables" ∂_x, ∂_y, ∂_z, liées par

$(\partial_x)^2 + (\partial_y)^2 + (\partial_z)^2 = 0$, (puisqu'aussi bien, lorsque $\hat{O}$ agit sur des opérandes harmoniques u, l'on a $\Delta u = 0$).

Moyennant donc notre formule (18), on peut écrire la "décomposition canonique" de $\hat{O}$:

(23) $$\hat{O} = \sum_{m=0}^{n} d_m \Phi_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

où d_m est donné par (19) etc.

Cette formule constitue la clef de notre étude. Articulée sur la "formule d'Hobson" que nous verrons plus loin, elle résoudra immédiatement le premier problème posé (de la correspondance cartésienne ; sphérique, des composantes d'un multipole).

9 - *REGLE DE DIFFERENTIATION MULTIDIRECTIONNELLE DES OPERANDES HARMONIQUES.*

De même que (18) a pu être reécrit en (20), nous reécrivons (23) sous la forme :

(23) $$\hat{O} = \sum_{p=0}^{[n/2]} (-1)^p 2^{2p} \varepsilon_{\frac{p}{2}} \left\{ \alpha_{2p} \hat{O}_1 + \beta_{2p} \hat{O}_2 \right\}$$

$$+ \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-}{2}\right]} (-1)^p 2^{2p+1} \left\{ \alpha_{2p+1} \hat{O}_3 - \beta_{2p+1} \hat{O}_4 \right\}$$

où $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3, \hat{O}_4$ sont les opérateurs différentiels correspondant aux formes F_1, F_2, F_3, F_4 de (20).

Tout ceci s'interprète en une règle de différentiation multidirectionnelle :

"Pour dériver selon les n vecteurs $\dot{h}$, on dérive selon les 4 jeux de vecteurs, caractérisant $\hat{O}_1, \hat{O}_2, \hat{O}_3$ et $\hat{O}_4$, jeux qui sont fixes, et on pondère au moyen de nombres qui - eux seuls - dépendent des vecteurs $\dot{h}$ considérés".

10 - *EXEMPLE DE DIFFERENTIATION QUELCONQUE D'UN OPERANDE HARMONIQUE.*

Si l'on considère la différentiation multidirectionnelle particulière $(\frac{\partial}{\partial x})^{\lambda} (\frac{\partial}{\partial y})^{\mu} (\frac{\partial}{\partial z})^{\nu}$, on a, d'après (11) :

$$(24) \qquad \frac{\partial^{\lambda+\mu+\nu}}{\partial x^{\lambda}\, \partial y^{\mu}\, \partial z^{\nu}} = \sum_{m} b_{m\lambda\mu\nu}\, \phi_{n,m} \left(\frac{\dot{\partial}}{\partial x}, \frac{\dot{\partial}}{\partial y}, \frac{\dot{\partial}}{\partial z}\right)$$

Appliquée à $\frac{1}{r}$, cette formule, moyennant la "formule d'Hobson", résoudra entièrement et de façon tout à fait générale le problème de la différentiation de $\frac{1}{r}$

SECTION 2

POLARISATION DES HARMONIQUES SPHERIQUES SOLIDES IRREGULIERS. GENERALISATION DE LA FORMULE D'HOBSON (QUI POLARISE $\frac{1}{R}$ SEULEMENT)

11 - NOTION D'HARMONIQUE POLARISE. NOTATIONS.

On appellera harmonique polarisé le résultat de l'application à un harmonique solide régulier ou irrégulier, de l'opérateur de polarisation (22).

Nous utilisons les harmoniques sphériques solides irréguliers et réguliers, "réduits", c-à-d :

$$(25) \qquad \gamma_n^m(R,\theta,\phi) = (n-|m|)! \; \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{R^{n+1}} \; e^{im\phi} \qquad (|m| \leqslant n)$$

$$(26) \qquad y_n^m(R,\theta,\phi) = \frac{1}{(n+|m|)!} \; R^n \; P_n^{|m|}(\cos\theta) e^{im\phi} \qquad (|m| \leqslant n)$$

Précisons que nous utilisons les "polynômes" associés de Legendre, de 1ᵉ espèce, dans l'acception :

$$(27) \qquad P_n^m(x) = (1-x^2)^{\frac{m}{2}} \left(\frac{d}{dx}\right)^m P_n(x) \qquad 0 \leqslant m \leqslant n$$

Dans ces conditions nous posons, pour désigner les harmoniques polarisés :

$$(28) \qquad \gamma_n^m(R\theta\phi\,;\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n) = \hat{O}\left[\gamma_n^m(R,\theta,\phi)\right]$$

$$(29) \qquad y_n^m(R\theta\phi\,;\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n) = \hat{O}\left[y_n^m(R,\theta,\phi)\right]$$

12 - RAPPEL DE LA FORMULE D'HOBSON (QUI POLARISE $\frac{1}{R}$ SEULEMENT.

On connait la "formule d'Hobson", que nous allons nous proposer de

généraliser, elle s'écrit :

$$(30) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-m} \left(\frac{\partial}{\partial x} \pm i \frac{\partial}{\partial y}\right)^{m} \left[\frac{1}{R}\right] = (-1)^{n}(n-m)!\frac{P_n^m(\cos\theta)}{R^{n+1}} e^{\pm im\phi}$$

avec $0 \leq m \leq n$. Nous commençons par l'étendre aux $m < 0$. On a, aisément, au total :

$$(31) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^{n-|m|} \left(\frac{\partial}{\partial x} + i\, sg(m)\frac{\partial}{\partial y}\right)^{|m|} \left[\frac{1}{R}\right] = (-1)^{n}(n-|m|)!\frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{R^{n+1}} e^{im\phi}$$

$$(|m| < n)$$

On reconnait au premier membre la forme homogène fondamentale (10)

La formule d'Hobson dans ces conditions doit être lue sous la forme.

$$(32) \qquad \phi_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) |\gamma_o^o| = (-1)^{n} \gamma_n^m \qquad (|m| \leq n)$$

De cette manière on pressent bien qu'elle n'est qu'un cas particulier d'une formule générale que précisément nous allons restaurer.

Rappelons qu'on interprète habituellement (30) et donc (32) en disant "tout harmonique solide irrégulier procède de $\frac{1}{R}$ par différentiations". Et en effet l'harmonique de degré n et d'ordre m s'y déduit de $\frac{1}{R}$ qui est harmonique de degré o et d'ordre 0. C'est dire qu'un harmonique s'engendre à partir de l'un d'entre eux, ici $\frac{1}{R}$, et comme nous l'allons montrer, tout aussi bien de tout autre.

4 - *PRODUIT DE 2 FORMES FONDAMENTALES*

On démontre, au préalable, et aisément que le produit de 2 formes fondamentales (10) de 3 variables liées par $x^2+y^2+z^2=0$, est lui même une forme fondamentale, à savoir :

$$(33) \qquad \phi_{nm}(xyz)\, \phi_{n'm'}(xyz) = (-1)^{(m,m')}\, \phi_{n+n',m+m'}(xyz)$$

où (m,m') est 0 si $mm' > 0$, et $\min(|m|,|m'|)$ si $mm' < 0$.

14 - *GENERALISATION DE LA FORMULE D'HOBSON POUR LA GENERATION DES HARMONIQUES IRREGULIERS*

Substituant dans (33) les opérateurs $\partial_x, \partial_y, \partial_z$ aux variables xyz, et appliquant l'opérateur différentiel ainsi obtenu à $\frac{1}{R}$, on obtient, moyennant la formule d'Hobson proprement dite, sa généralisation immédiate :

$$(34) \qquad \phi_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[\gamma_{n'}^{m'}\right] = (-1)^{n+(m,m')} \gamma_{n+n'}^{m+m'} \qquad \begin{matrix} (|m| \leqslant n \\ |m'| \leqslant n') \end{matrix}$$

Avec n' = m' = 0, on retrouve bien la formule d'Hobson tout court.

(34) s'interprète en disant qu'à partir d'un harmonique quelconque et pas seulement $\frac{1}{R}$ on peut engendrer, par de simples différentiations tout autre harmonique.

15 - *OBTENTION IMMEDIATE DE LA SERIE DE LAPLACE D'UN HARMONIQUE POLARISE A L'AIDE DE NOTRE DECOMPOSITION CANONIQUE DE L'OPERATEUR DE POLARISATION*

En utilisant la décomposition canonique (28) de l'opérateur de polarisation, on obtient pour un harmonique solide irrégulier polarisé, du type (28), l'expression :

$$(35) \qquad \gamma_n^{m'}(R\theta\phi ; \vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n) = \hat{O}\left[\gamma_{n'}^{m'}(R,\theta,\phi)\right] = \sum_{m=-n}^{n} d_n \, \phi_{nm}\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[\gamma_{n'}^{m'}\right]$$

Mais, alors, en vertu de notre généralisation (34) de la formule d'Hobson, qui s'articule très exactement sur la décomposition canonique - puisque toutes deux font intervenir également la forme fondamentale $\phi_{nm}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ - on obtient :

$$(36) \qquad \gamma_n^{m'}(R\theta\phi ; \vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n) = \sum_{m=-n}^{n} (-1)^{n+(m,m')} d_m \, \gamma_{n+n'}^{m+m'}(R,\theta,\phi)$$

Ceci constitue le développement selon les harmoniques sphériques solides irréguliers non polarisés, de l'harmonique polarisé. On l'appelle "Série de Laplace", de l'harmonique polarisé.

Nota : On comprend ici le pourquoi de toute notre démarche antérieure : c'est pour se raccorder à la formule d'Hobson -dans notre version généralisée- qui fait intervenir la forme fondamentale $\phi_{nm}(\partial_x,\partial_y,\partial_z)$, que nous avons élaboré notre théorie de la "décomposition Canonique" des formes homogènes (définies par n vecteurs), selon les formes $\phi_{nm}(xyz)$.

16 - *EXEMPLE FONDAMENTAL : POLARISATION DE $\frac{1}{R}$, SERIE DE LAPLACE DES DERIVEES DE $\frac{1}{R}$; CAS D'UN AXE N^uple DE DIFFERENTIATION*

On obtient, en particularisation immédiate de (36), pour la polarisation de $\frac{1}{R}$, au moyen de n vecteurs $\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n$:

$$(37) \qquad \hat{O}\left[\frac{1}{R}\right] = \gamma_o^o(R,\theta,\phi;\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n) = \sum_{m=-n}^{n} (-1)^n \, d_m \, \gamma_n^m(R,\theta,\phi)$$

Cette formule nous sera très utile pour la transformation du potentiel d'un multipôle electrostatique, des coordonnées cartésiennes aux coordonnées sphériques. Elle était un objet premier de notre étude.

A titre annexe nous pouvons résoudre à présent le problème de la différentiation de $\frac{1}{R}$ selon λ axes parallèles à Ox, μ parallèles à Oy, ν à Oz. Nous avons immédiatement grâce à (11) et à (32) :

$$(38) \qquad \frac{\partial^n}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu}\left[\frac{1}{R}\right] = \sum_m (-1)^n \, b_{m\lambda\mu\nu} \, \gamma_n^m(R,\theta,\phi) \qquad (\lambda+\mu+\nu = n)$$

soit en clair :

$$(39) \qquad \frac{\partial^n}{\partial x^\lambda \, \partial y^\mu \, \partial z^\nu}\left[\frac{1}{R}\right] = \sum_{\substack{|m|<\lambda+\mu \\ (2 \text{ en } 2)}}^{m} (-1)^m \, \frac{(n+|m|)!}{2^{\lambda+\mu}\, i^{\mu} \, sg(m)} \, L_\mu^{\frac{1}{2}(\lambda+\mu-|m|)}(\lambda) \times \frac{P_n^{|m|}(\cos\theta)}{R^{n+1}} \, e^{im\phi}$$

Voici quelques exemples d'application de cette formule, grâce à des tables [8] de nos nombres L :

$$(40)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^n}\frac{1}{R} = (-1)^n\, n!\, \frac{P_n^o(\cos\theta)}{R^{n+1}}$$

$$(41)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-1}\partial x}\frac{1}{R} = (-1)^n (n-1)!\, \frac{P_n^1(\cos\theta)}{R^{n+1}}\cos\phi$$

$$(42)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-1}\partial y}\frac{1}{R} = (-1)^n (n-1)!\, \frac{P_n(\cos\theta)}{R^{n+1}}\sin\phi$$

$$(43)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-2}\partial x^2}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{2R^{n+1}}\{(n-2)!P_n^2(\cos\theta)\cos 2\phi - n!\, P_n^o(\cos\theta)\}$$

$$(44)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-2}\partial x\partial y}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{2R^{n+1}}\{(n-2)!P_n^2(\cos\theta)\sin 2\phi\}$$

$$(45)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-3}\partial x^3}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{4R^{n+1}}\{(n-3)!P_n^3(\cos\theta)\cos 3\phi - 3(n-1)!P_n^1(\cos\theta)\cos\phi\}$$

$$(46)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-3}\partial x^2\partial y}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{4R^{n+1}}\{(n-3)!P_n^3(\cos\theta)\sin 3\phi - (n-1)!P_n^1(\cos\theta)\sin\phi\}$$

$$(47)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-3}\partial x\partial y^2}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{4R^{n+1}}\{-(n-3)!P_n^3(\cos\theta)\cos 3\phi - (n-1)!P_n^1(\cos\theta)\cos\phi\}$$

$$(48)\qquad \frac{\partial^n}{\partial z^{n-3}\partial y^3}\frac{1}{R} = \frac{(-1)^n}{4R^{n+1}}\{-(n-3)!P_n^3(\cos\theta)\sin 3\phi - 3(n-1)!P_n^1(\cos\theta)\sin\phi\}$$

etc...etc...

Si les n axes $\vec{h}_i$ sont confondus, l'opérateur de polarisation devient $(\vec{h}.\vec{\nabla})^n$, soit $\frac{\partial^n}{\partial z^n}$, et : l'on a, d'après (37), où seul subsiste le terme en m = 0

$$(49)\qquad (\vec{h}.\vec{\nabla})^n \frac{1}{R} = (-1)^n\, \gamma_n^o(R,\theta,\phi) = (-1)^n\, n!\, \frac{P_n(\vec{h}.\vec{\nabla}R)}{R^{n+1}}$$

Cette formule est bien connue, ce n'est autre, sous la forme (à

dessein) intrinsèque, que :

$$(50) \qquad P_n(\cos\theta) = \frac{(-1)^n}{n!} R^{n+1} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \frac{1}{R}.$$

17 - *DOUBLE POLARISATION DE* $\frac{1}{R}$

Il sera utile plus loin, pour les questions d'énergie mutuelle de 2 multipôles, de dégager au préalable cette notion ; la "double polarisation" de $\frac{1}{R}$ c'est l'application successive à $\frac{1}{R}$ d'un opérateur de polarisation $\hat{O}_h$ défini par n vecteurs $\vec{h}_i$, puis, au résultat obtenu, d'un nouvel opérateur de polarisation, $\hat{O}_h$, défini par n' autres vecteurs $\vec{h}'_i$.

Utilisant le même repère cartésien pour décrire ces opérateurs, au moyen des formules (23), (19), (15), (16), (17), (les formules étant "primées" pour les vecteurs $\vec{h}'_i$), on obtient immédiatement l'intéressante formule :

$$(51) \qquad \hat{O}_h \cdot \hat{O}_h \left[\frac{1}{R}\right] = \sum_{m'=-n}^{n'} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^{n+n'+(m,m')} d_m d'_{m'} \gamma_{n+n'}^{m+m'} (R,\theta,\phi)$$

SECTION 3

POLARISATION DES HARMONIQUES SPHERIQUES SOLIDES REGULIERS. GENERALISATION DES FORMULES DU TYPE "HOBSON" LES CONCERNANT.

8 - PREMIERE ETAPE DE LA CONSTRUCTION D'UNE FORMULE DU TYPE "HOBSON" POUR LES HARMONIQUES REGULIERS.

La polarisation des harmoniques passe, au vu de notre décomposition canonique (23), par l'élaboration préalable de formules du type "Hobson", c'est-à-dire des formules décrivant l'action de l'opérateur fondamental $\phi_{nm}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$ sur ces opérandes. Une première étape consiste à étudier l'action de l'opérateur ∂_z (à une puissance quelconque) seul. On part de la formule (11) :

$$(52)\quad R^n P_n^m(\cos\theta)\begin{Bmatrix}\cos m\phi\\ \sin m\phi\end{Bmatrix} = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \frac{(-1)^p}{2^{m+2p}} \frac{(n+m)!}{p!\,(p+m)!\,(n-m-2p)!} \begin{Bmatrix}\frac{\zeta+\zeta^*}{2}\\ \frac{\zeta-\zeta^*}{2i}\end{Bmatrix} (\zeta\zeta^*)^p z^{n-m-2p}$$

Nous réécrivons cette formule (valable pour $0 \leqslant m \leqslant n$) en nos notations et en l'étendant aux $m < 0$. Nous obtenons, aisément, en rassemblant les deux cas notre formule de travail.

$$(53)\quad y_n^{m'}(R\theta\phi) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n'-|m'|}{2}\right]} \frac{(-1)^p}{2^{2p+|m'|}} \frac{\xi^{p+|m'|}(m')\,\xi^{*\,p}(m')}{p!\,(p+|m'|)!\,(n'-|m'|-2p)!} z^{n'-|m'|-2p}$$

avec $0 \leqslant |m'| \leqslant n'$ et en ayant posé :

$$(54)\qquad \xi(m) = x + i\,sg\,(m)\,y$$

L'intérêt de cette formule est qu'elle assure le passage des coordonnées sphériques aux cartésiennes. Si dès lors on applique aux deux nombres l'opérateur $(\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma}$ (γentier), il transite, à droite, jusqu'à venir s'appliquer au facteur en z. Moyennant la formule évidente :

$$(55) \qquad (\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma} \; z^{\alpha} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!} z^{\alpha-\gamma} \qquad (\alpha\text{entier})$$

on obtient rapidement le premier résultat :

$$(56) \qquad (\frac{\partial}{\partial z})^{\gamma} \; y_N^M (R,\theta,\phi) = y_{N-\gamma}^M (R,\theta,\phi)$$

Ainsi des opérations de différentiations sur un harmonique (régulier) continue à engendrer des harmoniques de même nature.

9 - *SECONDE ETAPE DE LA CONSTRUCTION D'UNE FORMULE DE TYPE "HOBSON" POUR LES HARMONIQUES REGULIERS.*

Il reste à étudier l'action sur des harmoniques réguliers des opérateurs $\phi_m (\partial_x,\partial_y)$ (cf (7)), qui entrent dans la formation de $\phi_{nm} (\partial_x,\partial_y,\partial_z)$ (cf (10)). Nous utilisons toujours l'expression de travail (53). Les dérivations portent à présent exclusivement sur les variables x et y, (contenues dans ξ etξ^*).
Il nous a été commode pour effectuer le calcul d'utiliser ξ^* comme variables auxiliaires. A cet égard on établit aisément la formule de dérivation :

$$(57) \qquad \phi_m (\partial_x,\partial_y) = 2^{|m|} \left(\frac{\partial}{\partial \xi^*(m)}\right)^{|m|}$$

Un tel opérateur, appliqué donc aux deux membres de (53), a (à droite) s'appliquer aux seuls facteurs en $\xi(m'),\xi^*(m')$. La difficulté - considérable - survient du fait qu'il ne s'agit pas des mêmes m dans (57) et dans (53). On la surmonte en se ramenant au seul argument commun m + m'. Au terme de laborieuses considérations

à assurer un traitement unique et général [12] nous obtenons en définitive :

$$(58) \qquad \phi_m \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \left[y_{n'}^{m'} (R,\theta,\phi) \right] = (-1)^{|m|+(m,m')} y_{n'-|m|}^{m'+m} (R,\theta,\phi)$$

- *SYNTHESE : CONSTRUCTION DE NOTRE FORMULE DE TYPE "HOBSON", POUR LES HARMONIQUES REGULIERS.*

Combinant à présent les formules (56) et (58) qui décrivent l'action sur les harmoniques réguliers des 2 opérateurs qui entrent dans la composition de l'opérateur fondamental $\phi_{nm}(\partial_x, \partial_y, \partial_z)$, nous obtenons notre extension des formules d'Hobson aux harmoniques réguliers, analogue de notre formule (34) pour les harmoniques irréguliers :

$$(59) \qquad \phi_{n,m} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \left[y_{n'}^{m'} \right] = (-1)^{m+(m,m')} y_{n'-n}^{m'+m}$$

$$(|m| \leq n, \quad m' \geq n')$$

On note que dans (34), les indices n et n' s'ajoutaient, tandis qu'ici ils se retranchent.

- *POLARISATION DES HARMONIQUES REGULIERS.*

Disposant à présent de la formule de type "Hobson" (59), qui est nécessaire en effet pour s'articuler sur la décomposition canonique (23) de l'opérateur de polarisation, il est aisé désormais de "polariser" les harmoniques réguliers. Nous obtenons :

$$(60) \qquad y_{n'}^{m'} (R\theta\phi; \vec{h} \ldots \vec{h}_n) = \hat{O} \left[y_{n'}^{m'} \right] = \sum_{m=-n}^{n} (-1)^{m+(m,m')} d_m \, y_{n'-n}^{m'+m} (R\theta\phi)$$

SECTION 4

APPLICATION DE LA THEORIE DES HARMONIQUES POLARISES AU PROBLEME DU POTENTIEL D'UN MULTIPOLE EN ELECTROSTATIQUE.

2 - *SUR LA CONCEPTION MEME D'UN MULTIPOLE EN ELECTROSTATIQUE.*

Un multipole en électrostatique est une source ponctuelle d'un type général dont le potentiel s'écrit [13] :

$$(61) \qquad V_n(P) = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} (\vec{h}_1 \cdot \vec{\nabla})(\vec{h}_2 \cdot \vec{\nabla}) \ldots (\vec{h}_n \cdot \vec{\nabla}) \frac{1}{R}$$

Une telle source est donc caractérisée par n vecteurs $\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n$ et un scalaire $p_{(n)}$. Si l'on change le sens d'un des vecteurs on doit changer le signe du moment. Grâce à nos préliminaires mathématiques nous pouvons interpréter le potentiel d'un multipole, comme la "polarisation de $\frac{1}{R}$". On a en effet, d'après (22) :

$$(62) \qquad V_n(P) = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} \hat{O}_h \left[\frac{1}{R}\right]$$

3 - *CORRESPONDANCE DES COMPOSANTES CARTESIENNES ET SPHERIQUES D'UN MULTIPOLE.*

Précisons le problème posé. En coordonnées cartésiennes (62) s'écrit (compte tenu de l'étude du § 4) :

$$(63) \qquad V_n(p) = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{i_1 i_2 \ldots i_n} \partial^{i_1 i_2 \ldots i_n} \left[\frac{1}{R}\right]$$

Par ailleurs on déclare a priori qu'en sphériques, il s'écrit :

$$(64) \qquad V_n(p) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{m=0}^{n} \frac{p_n^m(\cos\theta)}{R^{n+1}} (a_{nm}\cos m\phi + b_{nm}\sin m\phi)$$

Le problème se pose donc de relier entre elles les composantes $p_{i_1 \ldots i_n}$ d'une part et les $a_{nm} b_{nm}$ d'autre part. Ce problème est pour nous virtuellement résolu de par la polarisation (37) de $\frac{1}{R}$. La formule (19) résoud en effet la question pour un multipole de grandeur $(-1)^n 4\pi\varepsilon_o$. Les d_m sont ses composantes sphériques : elles se calculent en (19) à partir des $a_{\lambda\mu\nu}$ qui, de par (15), (16), (17) sont liés aux axes du multipole. Pour le mutipole de grandeur $p_{(n)}$, posant, au lieu de (64) :

$$V_n(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm} \gamma_n^m(R,\theta,\phi) \qquad (65)$$

on a ceci :

$$A_{nm} = p_{(n)} d_m \qquad (66)$$

$$a_{nm} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]+i} \varepsilon_m \frac{(-1)^{i+j}}{2^{m+2i}} (n-m)! C_n^{m+2i} C_{m+2i}^{i} L_1^{2j} (m+i) p\begin{pmatrix} m+2i-2j \\ 2j \\ n-m-2i \end{pmatrix} \qquad (67)$$

$$b_{nm} = \sum_{i=0}^{\left[\frac{n-m}{2}\right]} \sum_{j=0}^{\left[\frac{m-1}{2}\right]+i} \frac{(-1)^{i+j+1}}{2^{m+2i-1}} (n-m)! C_n^{m+2i} C_{m+2i}^{1} L_i^{2j+1} (m+i) p\begin{pmatrix} m+2i-2j-1 \\ 2j+1 \\ n-m-2i \end{pmatrix}$$

$$p\begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ \nu \end{pmatrix} = p_{(n)} H(\lambda,\mu,\nu) \qquad \text{(cf (16))} \qquad (69)$$

$$p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = p_{(n)} H_{i_1 i_2 \ldots i_n} \qquad \text{(cf (17))} \qquad (70)$$

Voici en guise d'exemple le cas de l'octupole. Nous avons obtenu [14] :

$$a_{30} = 6p_{333} - 9(p_{113} + p_{223}) \qquad (71)$$

$$a_{31} = 6p_{133} - \frac{3}{2}(p_{111} + p_{122}) \qquad b_{31} = 6p_{233} - \frac{3}{2}(p_{112} + p_{222})$$

$$a_{32} = \frac{3}{2}(p_{113} - p_{223}) \qquad b_{32} = 3p_{123}$$

$$a_{33} = \frac{1}{4}(p_{111} - 3p_{122}) \qquad b_{33} = \frac{3}{4} p_{112} - \frac{1}{4} p$$

4 - *RETOUR SUR LE PROBLEME DES COMPOSANTES, PAR LA POLARISATION D'UN HARMONIQUE REGULIER.*

Morse [15] traitant du problème que nous venons de résoudre, parle de "considerable drudgery" c'est-à-dire d'un "travail... d'esclave", pour parvenir à la solution. Voici pourtant une seconde solution, qui, à l'inverse de la précédente faisant intervenir la polarisation d'un harmonique irrégulier, en l'occurence $\frac{1}{R}$, fait appel, elle, à la polarisation d'un harmonique régulier.

On sait qu'une distribution continue de charges en densité $\rho(P')$ admet en O une suite de multipoles ponctuels équivalents. De façon précise, le potentiel de la distribution :

$$V(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_{P' \in v} \frac{\rho(P')}{r_{P'P}}\, dv \tag{72}$$

moyennant la formule [16] de développement de $\frac{1}{r_{P'P}}$ que nous reécrivons, en nos notations :

$$\frac{1}{r_{P'P}} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{m=-N}^{N} y_N^{*m}(P')\, \gamma_N^m(P) \tag{73}$$

s'écrit :

$$V(P) = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{m=-N}^{N} A_{Nm}\, \gamma_N^m(P) \tag{74}$$

avec

$$A_{Nm} = \iiint_{P' \in v} \rho(P')\, y_N^{*m}(P')\, dv \quad (|m| \leq n) \tag{75}$$

Inversement un multipole en O admet une distribution volumique fictive équivalente, dont, évidemment, il constitue, en retour, l'unique élément de réduction multipolaire en O. De façon précise, partant de l'identité [17] :

$$\iiint_v f(\xi,\eta,\zeta)\, \partial_x^m\, \partial_y^n\, \Delta\left(\frac{1}{r}\right) dv = \Omega \partial_x^p\, \partial_y^m\, \partial_z^n\, f(xyz) \tag{76}$$

que nous avons généralisée, pour l'opérateur de polarisation $\hat{O}$,

sous la forme :

$$(77) \qquad \frac{(-1)^{n+1}}{4\pi} \iiint_{\text{espace}} f(P')\, \hat{O}'\Delta' \left(\frac{1}{PP'}\right) dv' = \hat{O} f(P)$$

où $\hat{O}'$ désigne l'opérateur $\hat{O}$ lorsqu'il porte plutôt sur les coordonnées x'y'z' de P', nous pouvons reécrire le potentiel (62) sous la forme :

$$(78) \qquad V_n(P) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \iiint_{\text{espace}} \frac{\rho(P')}{PP'} dv$$

avec

$$(79) \qquad \rho(P') = \frac{(-1)^{n+1}}{4\pi} P_{(n)}\, \hat{O}'\Delta' \left[\frac{1}{OP'}\right]$$

Elle est la densité fictive associée au multipole. Calculant ses coefficients A_{Nm} par (75), on obtient, immédiatement, moyennant une nouvelle application de (77) :

$$(80) \qquad A_{Nm} = p_{(n)}\, \hat{O}\left[y_N^{*m}(P)\right]\Big|_{P \to O} = p_{(n)}\, y_N^{*m}(R\theta\phi;\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n)\Big|_{(0,0,0}$$

Et ainsi les A_{nm} apparaissent comme résultat d'une polarisation d'un harmonique régulier. On invoque dès lors notre théorie. Nous reportant à (60), avec n' = N, et constatant que seul le terme en N = n et m' + m = 0 est effectif, on obtient

$$(81) \qquad A_{nm} = p_{(n)}\, d^{*}_{-m} \quad (\text{et } A_{Nm} = 0 \quad (N \neq n)).$$

soit, d'après les propriétés de ces nombres d (cf (19) et (6)) :

$$(82) \qquad A_{nm} = p_{(n)}\, d_m$$

On retrouve bien (66). Ceci teste donc la cohérence de l'ensemble de nos théories.

SECTION 5

APPLICATION DE LA THEORIE DE LA DOUBLE POLARISATION DES HARMONIQUES AUX PROBLEMES DE L'ENERGIE MUTUELLE DE DEUX MULTIPOLES EN ELECTROSTATIQUE

§ 25 - *ENERGIE D'UN MULTIPOLE DANS UN CHAMP EXTERIEUR*

L'énergie d'un multipôle placé en P(xyz), dans un champ extérieur V_{ex} s'écrit [18]

$$W = P_{i_1 i_2 \ldots i_n} \, \partial^{i_1 i_2 \ldots i_n} \, V_{ex}(P) \tag{83}$$

On reconnait grâce à (70), (12)...(17), l'expression cartésienne et symétrisé de l'opérateur de polarisation, soit :

$$W = P_{(n)} \; \hat{O}_{h/P} \, | V_{ex}(P) | \tag{84}$$

§ 26 - *ENERGIE D'UN MULTIPOLE DANS LE CHAMP D'UN AUTRE MULTIPOLE (ENERGIE MUTUELLE)*

Si le champ extérieur est celui d'un autre multipôle, $(P'_{(n')}; \vec{h}'_1 \vec{h}'_2 \ldots \vec{h}'_{n'})$ placé en P' on a, d'après (62) :

$$V_{ex}(P) = \frac{(-1)^{n'}}{4\pi\varepsilon_o} \; P'_{(n')} \; \hat{O}_{h'/P} \left(\frac{1}{P'P}\right) \qquad (\hat{O}_{h'} \text{ agissant sur xyz}) \tag{85}$$

Portant dans (84), on obtient au total :

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \; P_{(n)} \; P'_{(n')} \; \hat{O}_{h/P} \; \hat{O}_{h'/P'} \left[\frac{1}{PP'}\right] \tag{86}$$

en notant que :

$$\hat{O}_{h'/P} = (-1)^{n'} \; \hat{O}_{h'/P'} \tag{87}$$

Sous la forme (86) l'énergie mutuelle est parfaitement symétrique eu égard aux deux multipôles.

Sous la forme qui suit et qui fait intervenir des dérivations par rapport à xyz seulement

$$W = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} \; p_{(n)} \; p'_{(n')} \; \hat{O}_{h/P} \; \hat{O}_{h'/P} \left[\frac{1}{OP}\right]$$

ayant pris P' pour origine, on peut interpréter l'énergie mutuelle comme le résultat de la "double polarisation" de $\frac{1}{R}$ avec R = P'P, distance mutuelle des deux sources.

Utilisant notre formule (51) prévue d'ailleurs à cet effet, nous obtenons :

$$(88) \qquad W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \; p_{(n)} \; p'_{(n')} \sum_{m'=-n'}^{n'} \sum_{m=-n}^{n} (-1)^{n+(m,m')} d_m d_{m'} \gamma_{n+n'}^{m+m'}(R\theta\phi)$$

où un repère quelconque commun a été pris pour décrire les 2 multipôles.
Si l'on prend Oz sur la ligne OP qui joint les 2 multipôles, notre formule (88) se réduit aisément à la formule

$$(89) \qquad W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \; p_{(n)} \; p'_{(n')} \sum_{m} (-1)^{n+m} \; d_m \; d'^{*}_{m} \frac{(n+n')!}{R^{n+n'+1}}$$

avec $|m| < \min(n,n')$. Utilisons les caractérisations en sphériques A_{nm} (cf(66)) on a :

$$(90) \qquad W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{m} (-1)^{n+m} \; A_{nm} \; A'^{*}_{n',m} \frac{(n+n')!}{R^{n+n'+1}} \; .$$

On retrouve, là, une formule [19] de R.J. Buckler, J.O. Hirshfelder (écrite d'ailleurs pour 2 distributions continues).

7 - *NOTION DE MULTIPOLE FICTIF PRODUIT DANS LE PROBLEME DE 2 MULTIPOLES*

A partir des n axes $\vec{h}_i$ et des n' axes $\vec{h}'_i$ caractérisant les 2 multipôles, on peut définir un multipôle fictif de n+n' axes $\vec{h}_i$, $\vec{h}'_i$. Si en plus sa grandeur est

$$(91) \qquad p_{(n+n')} = (-1)^n \; p_{(n)} \; p'_{(n')}$$

on pourra écrire pour l'énergie d'interaction des multipôles n et n' :

$$W_{n,n'} = \frac{(-1)^{n+n'}}{4\pi\varepsilon_o} P_{(n+n')} \hat{O}_{h \cup h'} \left[\frac{1}{OP}\right] \tag{92}$$

Ceci s'interprète, d'après (84) même, comme l'énergie d'interaction d'une charge +1 en P et d'un multipôle $\{P_{(n+n')}; \vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n \quad \vec{h}'_1 \ldots \vec{h}'_n,\}$ en O.

Un tel multipôle fictif, "produit" des 2 multipôles en interaction, sert donc commodément à réduire -formellement- le problème.

SECTION 6

EXEMPLES DE CALCUL D'ENERGIE MUTUELLE ET DE FORCES PAR UNE METHODE DE REDUCTION MULTIPOLAIRE

- *CARACTERISATION "CARTESIENNE" ET "SPHERIQUE" D'UN MULTIPOLE AXIAL RELATIVEMENT A SON AXE*

Prenant pour axe $\vec{Oz}$ l'axe n^{uple} $\vec{h}$ lui même d'un multipôle de révolution (sis en O), de degré n et de moment $p_{(n)}$, le potentiel s'écrit d'après (49), de façon intrinsèque :

$$(92) \qquad V_{(n)} = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} (\vec{h}.\vec{\nabla})^n \left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left[n! p_{(n)}\right] \frac{P_n(\vec{h}.\vec{e}_R)}{R^{n+1}}$$

soit, avec l'axe Oz choisi, et d'après (25) :

$$(93) \qquad V_{(n)} = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} \left(\frac{\partial}{\partial z}\right)^n \left[\frac{1}{R}\right] = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} \gamma_n^o(R,\theta,\phi)$$

On voit donc qu'en représentation "cartésienne", on a :

$$(94) \qquad p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = 0 \qquad \text{(si les indices sont différents de 3)}$$

$$p_{33\ldots33} = p_{(n)}$$

Tandis qu'en représentation "sphérique", on a (cf (65)) :

$$(95) \qquad A_{nm} = 0 \qquad (m \neq 0)$$

$$A_{no} = p_{(n)} \qquad \text{(eu égard à l'axe } \vec{h} \text{ pris pour Oz)}$$

- *CARACTERISATION "CARTESIENNE" ET "SPHERIQUE" D'UN MULTIPOLE AXIAL, RELATIVEMENT A UN AXE QUELCONQUE*

Si l'on prend pour axe $\vec{Oz}$ un axe quelconque, par rapport auquel l'axe n^{uple}, $\vec{h}$, du multipôle de révolution est repéré par les angles θ_o, ϕ_o, (tandis que $\vec{R}$ l'est par θ,ϕ), utilisant la formule

d'addition [20] des polynômes de Legendre :

$$(96)\quad P_n(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2)) = \sum_{m=0}^{n} \varepsilon \frac{(n-m)!}{m(n+m)!} P_n^m(\cos\theta_1)\, P_n^m(\cos\theta_2) \times \cos m(\phi_1-\phi_2),$$

on a aisément, en repartant de (92) :

$$(97)\quad V_{(n)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{m=-n}^{n} A_{nm}\ \gamma_n^m(R\theta\phi)$$

avec :

$$(98)\quad A_{nm} = p_{(n)}\ n!\ y_n'^m\ (1,\theta_o,\phi_o)$$

Tels sont les nombres qui représentent alors, en sphériques, le multipôle, par rapport à Oz quelconque. En cartésiennes on construira les nombres $p_{i_1 i_2 \ldots i_n}$, au moyen des formules :

$$(99)\quad p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = p_{(n)}\ h_{i_1} h_{i_2} \ldots h_{i_n}$$

$$(100)\quad h_1 = \sin\theta_o \cos\phi_o \qquad h_2 = \sin\theta_o \sin\phi_o \qquad h_3 = \cos\theta_o$$

ou plus simplement (cf (69)).

$$(101)\quad p\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \nu\end{pmatrix} = p_{(n)}\ h_1^\lambda\ h_2^\mu\ h_3^\nu$$

- *ELEMENTS DE REDUCTION MULTIPOLAIRES D'UN DIPOLE FINI, EN SON CENTRE*

On appelle dipôle fini le système de 2 charges +q -q distantes de ℓ ; q est en A (ξ_u), -q est en A' $(\xi'_u = -\xi_u)$; on pose $\vec{h} = \frac{\overrightarrow{A'A}}{\ell}$. L'origine est O, milieu de A'A.

La représentation cartésienne est donnée en principe par la formule :

$$(102) \qquad p_{i_1 i_2 \ldots i_n} = \frac{1}{n!} \sum_{k=1}^{2} q^{(k)} \xi_{i_1}^{(k)} \ldots \xi_{i_n}^{(k)}$$

On trouve au total que le dipôle fini est équivalent en O à une suite infinie de multipôles axiaux, d'axes h :

$$\left\{ p_{(n)} = \frac{2}{n!} \left(\frac{\ell}{2}\right)^n q \; ; \; \vec{h} \; n^{\text{uple}} \right\} \text{, d'ordre impair}$$

En sphériques, relativement à un axe quelconque $\vec{Oz}$, les moments multipolaires complexes s'écrivent :

$$(103) \qquad A_{nm} = 2q\left(\frac{\ell}{2}\right)^n y_n^m (1, \theta_o, \phi_o) \quad (m = -n, \ldots n \; ; \; n = 1,3,5\ldots)$$

- *CALCUL DE L'ENERGIE MUTUELLE DE 2 DIPOLES FINIS*

Disposant en O_1 et O_2 deux dipôles finis $(q_1, -q_1, \ell_1)$ $(q_2, -q_2, \ell_2)$ on les réduit respectivement en O_1 et O_2 à leurs multipôles axiaux équivalents et l'on calcule l'énergie mutuelle totale comme somme des énergies mutuelles, 2 à 2, des multipôles fictifs de réduction D'après (90) on réobtient [21], avec l'expression (103) des moments complexes :

$$(104) \qquad W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{n_1=1,3..} \sum_{n_2=1,3..} \sum_{m=-n} (-1)^{n_2+m} \frac{(n_1+n_2)!}{(n_1+|m|)!(n_2+|m|)!} \ldots q_1 q_2 \frac{\ell_1^{n_1} \ell_2^{n_2}}{2^{n_1+n_2-2}} \times P_{n_1}^{|m|}(\cos\theta_1) P_{n_2}^{|m|}(\cos\theta_2) \frac{e^{im(\phi_1-\phi_2)}}{R^{n_1+n_2+1}}$$

- *FORCE EXERCEE SUR UN MULTIPOLE AXIAL ET DIAMETRAL PAR UNE SPHERE CONDUCTRICE AU POTENTIEL ZERO*

L'énergie mutuelle de 2 multipôles axiaux orientés selon la ligne, qui les joint, c'est d'après (90) et (95) :

$$(105) \qquad W_{n,n'} = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} \frac{(n+n')!}{\Delta^{n+n'+1}} p_{(n)} p'_{(n')}$$

où Δ est leur distance.

La force qui s'exerce entre eux est donc :

$$(106) \qquad F_{nn'} = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} p_{(n)} p'_{(n')} \frac{(n+n'+1)!}{\Delta^{n+n'+2}}$$

Nous utilisons ce résultat pour le calcul de la force exercée par une sphère conductrice au potentiel 0, sur un multipôle axial et diamétral influençant. Notre méthode consiste à évaluer les actions exercées sur $p_{(n)}$ par les images qu'il suscite dans la sphère et que précisément nous avons trouvées au § 7 (Ch I) : ce sont des multipôles axiaux et diamétraux :

$$\left\{ p'_{(n')} = (-1)^{n+1} \frac{a^{2n'+1}}{D^{n+n'+1}} C_n^{n'} p_{(n)} \; ; \; \vec{h} \; n'\text{uple} \right\}$$

$n' = 0, 1, \ldots n$. Nous avons donc pour force totale :

$$(107) \qquad F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \sum_{n'=0}^{n} \frac{(n+n'+1)!\,n!}{n'!} C_n^{n'} \frac{a^{2n'+1} D}{(D^2-a^2)^{n+n'+2}} p^2_{(n)}$$

Avec $n = 0$ on retrouve [22] la force exercée sur une charge :

$$(108) \qquad F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \frac{a\,D}{D^2-a^2} q^2$$

Avec $n = 1$ on retrouve [22] la force exercée sur un dipôle :

$$(109) \qquad F = -\frac{1}{4\pi\varepsilon_o} \left\{ \frac{2aD}{(D^2-a^2)^3} + \frac{6a^3 D}{(D^2-a^2)^4} \right\} p^2$$

- *FORCE EXERCEE SUR UN ANNEAU, DONT L'AXE PASSE PAR LE CENTRE D'UNE SPHERE CONDUCTRICE AU POTENTIEL O*

Nous renvoyons à notre travail cité [23], pour l'étude de cet intéressant exemple. Disons brièvement que nous déterminons en premier lieu l'image de l'anneau : ce sera un anneau coaxial occupant la position harmoniquement conjuguée. Dès lors nous réduisons chacun de ces anneaux à leurs éléments multipolaires respectifs, en leur centre : ce seront des multipôles axiaux et diamétraux. Nous calculons alors, à tout ordre de précision donné, la force totale comme résultante des actions exercées, 2 à 2, par les "multipôles objets" sur les "multipôles images". Le calcul effectué par cette méthode corrobore entièrement celui que l'on peut effectuer exactement [24] sur la force entre 2 spires, au moyen des intégrales elliptiques de Legendre.

SECTION 7

EXPRESSION DE L'ENERGIE MUTUELLE DE 2 MULTIPOLES A PARTIR DE LEURS AXES. THEORIE DE MAXWELL DES POLYNOMES DE LAPLACE

- FORMULE DE MAXWELL

Il existe dans la littérature mathématique des notions qui correspondent de façon étonnamment adéquate aux problèmes physiques des multipôles. Ce sont les notions de "Polynômes de Laplace" et de "Formule de Maxwell". Toutefois ces notions ne fourniront qu'une étude géométrique de ces multipôles et c'est ce qui explique les limites de leur intérêt. Toutefois elles peuvent s'avérer pratiques dans certains cas, notamment le cas de multipôles axiaux.

On appelle polynôme de Laplace d'axes $\vec{h}_1 \ldots \vec{h}_n$, et d'ordre n, la quantité, purement angulaire, non-obstant les apparences (R s'élimine, cf (37)) :

$$S_n(\theta,\phi) = (-1)^n \, R^{n+1} \quad \hat{O}_h \left[\frac{1}{R}\right] \tag{110}$$

Au moyen de (37) on obtient son développement en "Série de Laplace"

$$S_n(\theta,\phi) = \sum_{m=-n}^{n} d_m (n-|m|)! \; P_n^{|m|}(\cos\theta) \; e^{im\phi} \tag{111}$$

La "formule de Maxwell" nous oriente sur une autre voie : elle met davantage en évidence les axes, elle s'écrit :

$$S_n(\theta,\phi) = \sum_{p=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^p \, (2n-2p-1)!! \; (\Sigma \; \lambda^p \; \mu^{n-2p}) \tag{112}$$

avec :

$$\lambda_{ij} = \vec{h}_i \cdot \vec{h}_j \; , \qquad \mu_k = \vec{e}_R \cdot \vec{h}_k \tag{113}$$

Dans (112) la somme sur λ et μ est symbolique : elle comporte tous les produits de λ et μ , en nombres indiqués, que l'on peut former de manière que les n indices inférieurs forment une permutation de 1,2,...n.

- *APPLICATION AU PROBLEME DE L'ENERGIE*

Revenant sur l'expression (92) de l'énergie mutuelle de 2 multipôles, comme résultat d'une double polarisation de $\frac{1}{R}$, ou si l'on veut d'une polarisation unique mais sur l'ensemble des axes $\vec{h}$ et $\vec{h}'$, on peut écrire, grâce à (110) :

$$(114) \qquad W_{nn'} = \frac{(-1)^n}{4\pi\varepsilon_o} \; P_{(n)} \; P'_{(n')} \; \frac{S_{n+n'}(\theta,\phi)}{R^{n+n'+1}}$$

On voit donc que la notion physique d'énergie mutuelle est entièrement rattachée à la notion mathématique de "polynômes de Laplace".

Dans le travail cité [8], nous donnons (p.77...100) d'abondantes illustrations de la formule (114) : charge et multipôle, dipôle et multipôles d'ordre égal ou supérieur etc...etc...

SECONDE PARTIE

LES FONCTIONS SPECIALES EN RELATIVITE

CHAPITRE III

L'OSCILLATEUR LINEAIRE RELATIVISTE

- *OBTENTION DE LA LOI HORAIRE A PARTIR DE L'INTEGRALE PREMIERE DE L'ENERGIE*

Le mouvement d'une particule de masse au repos m_o dans le champ de rappel $U = \frac{1}{2} Kx^2$, admet l'intégrale première

(1) $$mc^2 + U = E \qquad (\text{avec } m = m_o(1-\dot{x}^2)^{-\frac{1}{2}})$$

On en tire aisément la vitesse en fonction de x. Posant

(2) $$\omega_o = \sqrt{\frac{K}{m_o}} \; ; \quad \varepsilon = \frac{1/2 Ka^2}{m_o c^2} \; ; \quad a = \left(\frac{2}{K}\right)^{\frac{1}{2}} (E-m_o c^2)^{\frac{1}{2}} \; ; \quad \sin\varphi = \frac{x}{a}$$

on obtient [26] :

(3) $$\omega_o t = \int_0^{\varphi} \frac{1+\varepsilon\cos^2\theta}{\sqrt{1+\frac{\varepsilon}{2}\cos^2\theta}} \, d\theta$$

Il est bien connu [29] qu'une telle loi horaire peut s'exprimer à l'aide des intégrales incomplètes elliptiques de Legendre soit :

(4) $$\omega_o t = \frac{1}{k'} \{2\, E(k,\varphi) - k'^2\, F(k,\varphi)\}$$

avec

(5) $$k = (1+2\varepsilon^{-1})^{-\frac{1}{2}} \qquad k' = \sqrt{1-k^2}$$

On sait en outre que le mouvement est périodique, de période :

(6) $$T = \frac{2}{\pi} \, \frac{2\, E(k) - k'^2 K(k)}{k'} \, T_o$$

où E et K sont ici les intégrales complètes de Legendre et T_o la période classique.

- *EXPRESSION DE LA PERIODE, NE FAISANT INTERVENIR QU'UNE INTEGRALE COMPLETE DE LEGENDRE*

Moyennant l'identité [29] :

$$(17) \qquad E(\dot{k}) = \frac{2\,E(k) - k'^2\,K(k)}{1+k}$$

nous avons pu <u>réduire</u> l'expression de la période, sous la forme :

$$(18) \qquad \frac{T}{T_o} = \frac{2}{\pi}\,\frac{1+k}{k'}\,E(\dot{k}) \qquad \left(\text{avec } \dot{k} = \frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

ou

$$(19) \qquad \frac{T}{T_o} = \frac{2}{\pi}\sqrt{\frac{1+k}{1-k}}\;E\left(\frac{2\sqrt{k}}{1+k}\right)$$

Si l'on développe (19) selon les puissances du paramètre ε (qui caractérise l'importance de l'effet relativiste, on a en remontant à (3) et utilisant l'intégrale de Wallis :

$$(20) \qquad \frac{T}{T_o} = \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\ell+1}}{2^{\ell}}\,\frac{2\ell+1}{2\ell-1}\left[\frac{(2\ell-1)!!}{2\ell\;!!}\right]^2 \varepsilon^k$$

soit :

$$(21) \qquad \frac{T}{T_o} = 1 + \frac{3}{8}\varepsilon - \frac{15}{256}\,\varepsilon^2 + \frac{35}{2048}\,\varepsilon^3 - \ldots$$

- *FORMULES ANNEXES*

On établit aisément ensuite :

$$(22) \qquad \frac{\omega}{\omega_o} = 1 - \frac{3}{8}\varepsilon + \frac{51}{256}\,\varepsilon^2 + \ldots$$

$$(23) \qquad \frac{\omega^2}{\omega_o^2} = 1 - \frac{3}{4}\varepsilon + \frac{69}{128}\,\varepsilon^2 \ldots$$

$$(24) \qquad \frac{\omega^4}{\omega_o^4} = 1 - \frac{3}{2}\varepsilon + \frac{105}{64}\,\varepsilon^2 \ldots$$

$$(25) \qquad \omega_o t = \varphi + \frac{3}{8}\,\varepsilon\left(\varphi + \frac{1}{2}\sin 2\varphi\right) - \frac{5}{256}\,\varepsilon^2\left(3\varphi + 2\sin 2\varphi + \frac{\sin 4\varphi}{4}\right)\ldots$$

$$(26) \qquad \omega t = \varphi + \frac{3}{16}\varepsilon \sin 2\varphi - \frac{\varepsilon^2}{256}\,(28 \sin 2\varphi + 5 \sin 4\varphi)\cdots$$

- *OBTENTION DE LA LOI DE TEMPS* x = x(t) *PAR LA METHODE DE PERTURBATIONS*

L'équation différentielle du mouvement (déduite de (1)) a pu être réécrite, soit :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 \left(1 - \frac{\dot{x}^2}{c^2}\right)^{-\frac{3}{2}} x = 0 \qquad (27)$$

Elle n'est pas linéaire, aussi a-t-on recours pour la résoudre à la méthode des Perturbations [30]. On développe le radical, soit :

$$\ddot{x} + \omega_o^2 x - \frac{3\varepsilon}{a^2} x\dot{x}^2 + \frac{3}{2} \frac{\varepsilon^2}{\omega_o^2 a^4} x\dot{x}^4 + \ldots = 0 \qquad (28)$$

Posant $\tau = \omega t$, $\frac{dx}{d\tau} = x'$, $x = au$, on réécrit (28) sous la forme :

$$\frac{\omega^2}{\omega_o^2} x'' + x - 3\varepsilon u u'^2 \frac{\omega^2}{\omega_o^2} + \frac{3}{2} \varepsilon^2 u u'^4 \frac{\omega^4}{\omega_o^4} \ldots = 0 \qquad (29)$$

Recherchant une solution du type

$$u(\tau) = u_o + \varepsilon u_I + \varepsilon^2 u_{II} + \ldots \qquad (30)$$

on obtient aisément pour la détermination des fonctions u_o, u_I,... etc... le système différentiel :

$$\begin{aligned} u_o'' + u_o &= 0 \\ u_1'' + u_1 &= 3u_o u_o'^2 + \frac{3}{4} u_o'' \\ u_2'' + u_2 &= 3(u_1 u_o'^2 + 2u_o' u_o u_1') - \frac{3}{2} u_o u_o'^4 + \frac{3}{4} u_1'' - \frac{69}{128} u_o'' - \frac{9}{4} u_o u_o'^2 \\ &\vdots \end{aligned} \qquad (31)$$

que nous avons aussitôt résolu de proche en proche, ce qui nous a conduit en définitive à l'expression suivante, (en série de Fourier), de la solution :

$$x = a \{\sin \omega t - \frac{3}{32} \varepsilon (\sin \omega t + \sin 3\omega t) \ldots \qquad (32)$$

La méthode est laborieuse si l'on désire aller plus loin. Aussi avons nous pratiqué une autre méthode.

- *CALCUL DIRECT DES COEFFICIENTS DE FOURIER DE* x(t)

Calculer directement les coefficients de Fourier de x(t), en s'aidant de (26), est au fond la meilleure façon d'obtenir l'expression de la loi horaire sous la forme x = x(t)

et non t = $t(\varphi)$ = t (arc sin $\frac{x}{a}$). Opérant en complexes, on a :

(33) $$u(t) = \Sigma\, c_n\, e^{in\omega t} \; ; \; c_n = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} u(t)\, \exp(-in\omega t)\, dt$$

Après une intégration par parties, nous avons pu obtenir pour les n impairs (c_{2p}=0)

(34) $$c_{2p+1} = -\frac{2i}{(2p+1)\pi} \int_0^{\frac{T}{4}} \cos(2p+1)\omega t \quad du$$

Revenons aux coefficients de Fourier réels (de la série en sinus) et passant à l'unique variable φ , à l'aide de (26), on a en définitive :

(35) $$b_{2p+1} = \frac{4}{(2p+1)\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\left[(2p+1)\left(\varphi+\frac{3}{16}\,\varepsilon \sin 2\varphi + \ldots\right)\right] \cos\varphi \, d\varphi$$

Pratiquant les formules d'addition des cosinus (pour cos(a+b+c+..)) puis les formules de transformation (du type cos a cos b etc...) enfin pratiquant des développements selon ε, aux ordres requis, pour les quantités cos(λε sin 2φ) etc..., nous obtenons, très laborieusement :

$$b_1 = 1 - \frac{3}{32}\,\varepsilon - \frac{47}{1024}\,\varepsilon^2 \ldots$$

$$b_3 = -\frac{3}{32}\,\varepsilon + \frac{159}{2048}\,\varepsilon^2 \ldots$$

$$b_5 = \frac{65}{2048}\,\varepsilon^2 + \ldots$$

D'où la série de Fourier cherchée, qui confirme entièrement (32) :

(36) $$x = a\left\{\sin\omega t - \frac{3}{32}\,\varepsilon(\sin\omega t + \sin 3\omega t) - \frac{\varepsilon^2}{2048}(94\sin\omega t - 159\sin 3\omega t - 65\sin 5\omega t)\ldots\right\}$$

CHAPITRE IV

LE MOUVEMENT KEPLERIEN SUR LA ROSACE DE SOMMERFELD

POSITION DU PROBLEME. TRAJECTOIRE.

On considère [32] une particule de masse au repos m_o , en mouvement dans le champ $U = \frac{K}{r}$. En traitement relativiste (aussi bien d'ailleurs que classique)énergie E et moment L sont conservés. Au moyen de ces intégrales premières on obtient aisément [33] les équations (loi de temps et orbite) du mouvement. Dans l'ouvrage cité en référence nous avons analysé les divers types d'orbites, consistant en rosaces ou spirales, et, en particulier, en ayant dénombré 17 types, nous avons remarqué que 5 seulement ont une homologue classique (les rosaces seules se retrouvent en les coniques) toutes les autres étant proprement relativistes). Nous nous intéressons ici à la seule rosace de Sommerfeld qui correspond au mouvement relativiste de la particule dans un champ coulombien attractif (K < 0). Elle s'obtient de façon précise dans l'éventualité suivante :

(1) $$L \neq 0 \; ; \quad K < L c \; ; \quad -(1-q)\, m_o c^2 < E < 0$$

où

(2) $$q = (1 - K^2 L^{-2} c^{-2})^{\frac{1}{2}} \qquad (q < 1)$$

Son équation polaire (l'origine étant au centre des forces attractives) s'écrit :

(3) $$\frac{p}{r} = 1 + e \cos q\,\theta$$

Ainsi la rosace elliptique de Sommerfeld correspond-elle à l'ellipse de Kepler (pour laquelle q est un entier, égal d'ailleurs à 1).
A cet égard nous nous sommes efforcés de mettre en évidence dans les grandeurs relativistes la partie qui se retrouve en traitement classique. C'est ainsi que si le mouvement classique est décrit par les formules :

(4) $$\frac{p_o}{r} = 1 + e_o \cos\theta$$

(5) $$p_o = \frac{L_o^2}{m_o |K|}$$

(6) $$e_o^2 = 1 + 2 \frac{L_o^2}{m_o K^2} E_o \qquad (e_o < 1)$$

(7) $$a_o = \frac{p_o}{1-e_o^2} = \frac{1}{2} \frac{|K|}{|E_o|}$$

(8) $$\omega_o = \frac{2^{3/2}}{m_o^{1/2}} \frac{|E_o|^{3/2}}{|K|}$$

avec

(9) $$L_o \neq 0 \; ; \quad -\frac{1}{2} m_o \frac{K^2}{L_o^2} \leqslant E_o < 0$$

le mouvement relativiste lui est décrit par (1), homologue de (9), (3) homologue de (4) et par :

(10) $$p = \frac{L^2}{m_o |K|} \left\{ \left| 1 - \frac{K^2}{L^2 c^2} \right| \left| 1 + \frac{E}{m_o c^2} \right|^{-1} \right\}$$

(11) $$e^2 = 1 + \frac{2 L^2}{m_o K^2} E \left\{ \left[1 - \frac{K^2}{L^2 c^2} \right] \left[1 + \frac{E}{2 m_o c^2} \right] \left[1 + \frac{E}{m_o c^2} \right]^{-2} \right\} \quad (e < 1)$$

(12) $$a = \frac{p}{1 - e^2} = \frac{1}{2} \frac{|K|}{|E|} \left\{ \left| 1 + \frac{E}{m_o c^2} \right| \left| 1 + \frac{E}{2 m_o c^2} \right|^{-1} \right\}$$

(13) $$\omega = \frac{2^{3/2} |E|^{3/2}}{m_o^{1/2} |K|} \left\{ \left| 1 + \frac{E}{2 m_o c^2} \right|^{3/2} \right\}$$

homologues de (5) (6) (7) et (8).

De même la loi de temps paramétrique et la représentation paramétrique classiques

(14) $$\omega_o t = \phi - e_o \sin \phi$$

(15) $$r = a_o (1 - e_o \cos \phi)$$

(16) $$\operatorname{tg} \frac{\theta}{2} = \left(\frac{1 + e_o}{1 - e_o}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$$

deviennent en traitement relativiste :

(17) $$\omega t = \phi - e \mathcal{R}^2 \sin \phi$$

(18) $$r = a (1 - e \cos\phi)$$

(19) $$\operatorname{tg} q \frac{\theta}{2} = \left(\frac{1 + e}{1 - e}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \frac{\phi}{2}$$

On notera donc d'un traitement à l'autre, l'insertion de q non égal à 1, la généralisation des coefficients p_o , e_o , a_o en les coefficients p, e, a, le maintien général des structures des formules et en particulier de la loi horaire, à l'insertion près du facteur en $\mathcal{R}^2$ où :

(20) $$\mathcal{R} = 1 + \frac{E}{m_o c^2} = \frac{\mathcal{E}}{m_o c^2}$$

Ceci établit que toute la généralisation relativiste consiste à rétablir ce facteur $\mathcal{R}$ non égal à 1. Inversement la limite classique consiste à faire $\mathcal{R} = 1$, c'est-à-dire, somme toute à considérer l'énergie E de la particule en mouvement comme bien faible eu égard à son énergie au repos $m_o c^2$.

SERIE DE FOURIER DE r (t)

Le rayon vecteur r est une fonction périodique du temps dans les deux traitements. A ce titre il se développe en série de Fourier. C'est Lagrange [34][34b][34c][34g] (1770) qui a donné cette formule ainsi d'ailleurs que Bessel (1824) à l'occasion même de la découverte - sous forme intégrale - des fonctions qui portent son nom. On a en

le cas classique :

$$(21) \qquad \frac{r}{a_o} = 1 + \frac{e_o^2}{2} - 2\, e_o \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n (n\, e_o) \cos n\, \omega_o\, t$$

C'est cette formule et plus bas, ses analogues, que nous avons étendues au cas relativiste, en paraphrasant d'ailleurs très simplement la méthode, rapportée par Petiau, qui préside à leur élaboration. Nous écrivons :

$$(22) \qquad \frac{r}{a} = \rho = \frac{A_o}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos n\omega t$$

avec

$$(23) \qquad A_n = \frac{2}{T} \int_{(T)} \rho \cos n\, \omega t dt = \frac{2}{T} \int_{(T)} \rho\, e^{-in\omega t} dt \quad (n=0,1,2....)$$

Intégrant par parties, pour $n \neq 0$, nous obtenons une expression plus simple :

$$(24) \qquad A_n = -\frac{i}{n\pi} \int e^{-in\omega t}\, d\rho \qquad (n = 1,2,...)$$

tandis que, pour A_o, un calcul direct fournit :

$$(25) \qquad \frac{A_o}{2} = 1 + \frac{e^2 \mathcal{R}^2}{2}$$

Dans (24) on hésite sur le choix de la variable d'intégration ρ ou t, on tranche en choisissant ϕ, (généralisation relativiste de l'anomalie excentrique), auquel précisément t et ρ sont liés par (17) et (18). Il vient dès lors, l'intervalle d'intégration de T pour t, devenant de 2π pour ϕ :

$$(26) \qquad A_n = -\frac{i\, e}{n\pi} \int_{(2\pi)} \exp\left\{-in\phi + ine\mathcal{R}^2 \sin\phi\right\} \sin\phi\, d\phi \qquad (n=1,2...)$$

Recourant ici aux formules intégrales de Hansen pour les fonctions de Bessel :

$$(27) \qquad J'_n(z) = \frac{i}{2\pi} \int_0^{2\pi} \exp\left\{-in\phi + iz\sin\phi\right\} \sin\phi\, d\phi$$

nous obtenons aussitôt :

$$(28) \qquad A_n = -\frac{2\, e}{n} J'_n (n\, e\mathcal{R}^2) \qquad (n = 1,2,....)$$

Au total, la série de Fourier relativiste cherchée, s'écrit :

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2\mathcal{R}^2}{2} - 2e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n (n\, e\mathcal{R}^2) \cos n\,\omega t \tag{29}$$

On voit que la généralisation consiste encore en les substitutions $e_o \to e$, $a_o \to a$ et à la restauration du facteur $\mathcal{R}$; inversement nous retrouvons immédiatement la célèbre formule de Lagrange en faisant tout simplement $e \to e_o$, $a \to a_o$ et $\mathcal{R} = 1$, dans la nôtre.

AUTRES GENERALISATIONS DE SERIES DE FOURIER CLASSIQUES

Les Auteurs citent de nombreuses autres séries de Fourier classiques afférentes au problème de Kepler :

$$\frac{a_o}{r} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n (n\, e_o) \cos n\,\omega_o t \tag{30}$$

$$\cos\theta = -e_o + 2\,\frac{1-e_o^2}{e_o} \sum_{n=1}^{\infty} J_n (ne_o) \cos n\,\omega_o t \tag{31}$$

$$\sin\theta = 2\sqrt{1-e_o^2} \sum_{n=1}^{\infty} J'_n (ne_o) \sin n\,\omega_o t \tag{32}$$

$$\cos\phi = -\frac{e_o}{2} + 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} J'_n (ne_o) \cos n\,\omega_o t \tag{33}$$

$$\sin\phi = \frac{2}{e_o} \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n (ne_o) \sin n\,\omega_o t \tag{34}$$

$$\theta - \omega_o t = 2 \sum_{1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{n} J_n (ne_o) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} f_o^k \left[J_{n+k}(ne_o) + J_{n-k}(ne_o) \right] \right\} \sin n\omega_o t \tag{35}$$

$$\phi - \omega_o t = 2 \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n (ne_o) \sin n\,\omega_o t \tag{36}$$

avec

$$(37) \qquad f_o = \frac{1 - \sqrt{1 - e_o^2}}{e_o}$$

etc...

Nous les avons toutes généralisées au cas relativiste. Nous servant successivement des formules :

$$(38) \qquad \cos \phi = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{r}{a}\right)$$

$$(39) \qquad \frac{1}{1-e\cos\phi} = \frac{1}{\left(1-e^2\right)^{1/2}} \left\{1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} f^k \cos k\phi \right\} \qquad (e < 1)$$

$$(40) \qquad f = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{e}$$

$$(41) \qquad 1 - e\mathcal{R}^2 \cos\phi = (1 - \mathcal{R}^2) + \mathcal{R}^2 (1 - e\cos\phi)$$

$$(42) \qquad \frac{1 - e\mathcal{R}^2 \cos\phi}{1 - e\cos\phi} = \frac{1 - \mathcal{R}^2}{\sqrt{1-e^2}} \left\{ 1 + \frac{\mathcal{R}^2}{1-\mathcal{R}^2} \sqrt{1-e^2} + 2 \sum_{k} f^k \cos k\phi \right\} \qquad (e < 1)$$

$$(43) \qquad \cos q\theta = \frac{1}{e} \left(\frac{p}{r} - 1\right)$$

$$(44) \qquad \phi = \omega t + e\mathcal{R}^2 \sin\phi$$

$$(45) \qquad \sin q\theta = \sqrt{1 - e^2} \, \frac{\sin\phi}{1-e\cos\phi}$$

etc..., nous avons su obtenir les séries de Fourier relativistes :

$$(46) \qquad \frac{a}{r} = \mathcal{R}^2 \left\{ 1 + \frac{1 - \mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2\sqrt{1-e^2}} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_n(ne\mathcal{R}^2) \left(1 + \frac{1-\mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2\sqrt{1-e^2}}\right) + \right.\right.$$

$$\left.\left. \frac{1 - \mathcal{R}^2}{\mathcal{R}^2\sqrt{1-e^2}} \sum_{k=1}^{\infty} f^k \left(J_{n+k}(ne\mathcal{R}^2) + J_{n-k}(ne\mathcal{R}^2)\right) \right] \cos n\omega t \right\}$$

$$(47)\quad \cos q\theta = \mathcal{R}^2\left\{-e + \frac{\mathcal{R}^2-1}{\mathcal{R}^2} f + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_n(ne\mathcal{R}^2)\left(\frac{1-e^2}{e} + \frac{1-\mathcal{R}^2}{e\mathcal{R}^2}\sqrt{1-e^2}\right)\right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-\mathcal{R}^2}{e\mathcal{R}^2}\sqrt{1-e^2} \sum_{k=1}^{\infty} f^k \left[J_{n+k}(ne\mathcal{R}^2) + J_{n-k}(ne\mathcal{R}^2)\right]\right] \cos n\omega t\right\}$$

$$(48)\quad \sin q\theta = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{(\mathcal{R}^2\sqrt{1-e^2} + (1-\mathcal{R}^2))J_n'(ne\mathcal{R}^2) + (1-\mathcal{R}^2) \sum_{k=1}^{\infty} f^k\right.$$

$$\left.(J'_{n+k}(ne\mathcal{R}^2) + J'_{n-k}(ne\mathcal{R}^2))\right\} \sin n\omega t$$

$$(49)\quad \cos\phi = -\frac{e\mathcal{R}^2}{2} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n'(ne\mathcal{R}^2) \cos n\omega t$$

$$(50)\quad \sin\phi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{ne\mathcal{R}^2} J_n(ne\mathcal{R}^2) \sin n\omega t$$

$$(51)\quad \phi - \omega t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} J_n(ne\mathcal{R}^2) \sin n\omega t$$

$$(52)\quad q\theta - \omega t = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{\frac{1}{n} J_n(ne\mathcal{R}^2) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n} f^k (J_{n+k}(ne\mathcal{R}^2) + J_{n-k}(ne\mathcal{R}^2))\right\}$$

$$\sin n\omega t.$$

On note que la restauration de $\mathcal{R} \neq 1$, dans ces formules, conduit dans certains cas (par exemple (46), à comparer à (30)) à l'apparition de termes relativistes insoupçonnés dans le traitement classique.

Evidemment pour conclure, remarquons que tous les termes relativistes rétablis, s'évanouissent si nous faisons simplement $\mathcal{R} = 1$ dans nos formules.

On mesure ici à la fois toute la connexité et toute la dissemblance des deux traitements.

TROISIEME PARTIE

LES FONCTIONS SPECIALES EN MECANIQUE QUANTIQUE

CHAPITRE V

PRINCIPE DE L'APPROXIMATION CLASSIQUE EN MECANIQUE QUANTIQUE

- *EXPOSE*

On sait combien la Mécanique Quantique relève de conceptions et d'un formalisme substantiellement différents de ceux de la Mécanique classique, qu'elle soit newtonienne ou hamiltonienne.

En effet a priori tout les oppose :

- compatibilité de toutes les grandeurs physiques en théorie classique et en particulier de vitesse et position donnant lieu par conséquent au concept de trajectoire.
- incompatibilité de grandeurs en théorie quantique et précisément de position et vitesse et donc disparition de la notion de trajectoire bien définie.
- déterminisme des valeurs d'un grandeur soumises à mesure d'une part et probabilisme d'autre part.
- possibilité pour une grandeur classique d'accuser toute valeur a priori, quantification des valeurs en traitement quantique, c-à-d possibilités de valeurs, restreintes, et interdiction absolue de toutes les autres.
- enfin les lois classiques se formulent à partir d'équations différentielles ordinaires pour des grandeurs scalaires (dans la formulation d'Hamilton Jacobi, version la plus élaborée de la Mécanique Classique, on n'atteint qu'une équation aux dérivées partielles du 1^e ordre).

Par contre la théorie quantique consiste en équations opératorielles, ie portant non sur des scalaires mais sur des opérateurs linéaires, associés précisément aux grandeurs classiques, lesquelles en retour se voient affecter pour seules valeurs possibles, le spectre du dit opérateur.

Devant l'énorme hiatus qui sépare donc les deux traitements, et mûs par le sentiment que "si la Nature a horreur du vide" elle ignore également les discontinuités entre ses deux manières de traiter les problèmes, les physiciens ont élaboré la théorie de l'Approximation Classique qui vient précisément jeter un pont entre les deux doctrines.

C'est aussi précisément à cet endroit crucial que sur la suggestion et les indications de Monsieur le Doyen E. Durand, auteur d'études fondamentales sur la question (35)(36), nous nous sommes placés.

Rappelons[37] brièvement en quoi consiste l'"approximation classique". Pour retrouver le comportement classique on considère la particule dans un état qui se décrit comme "un paquet d'ondes", c-à-d une combinaison de ses états stationnaires d'énergie, centrée toutefois sur un haut niveau d'énergie. Un tel état est décrit donc par

$$\psi = \sum a_n \psi_n \tag{1}$$

où les a_n ne sont sensiblement non nuls qu'au voisinage de n = N, N grand. Dans ces conditions, en l'hypothèse d'un spectre discret, ce qui sera le cas des exemples envisagés dans cette étude, la moyenne d'une grandeur physique f, sur l'état ψ, qui en toute rigueur se présente sous la forme d'une somme double :

$$f = \sum_{n} \sum_{n'} a_{n'} a_n \langle n' | f | n \rangle \exp\left\{ i \omega_{n',n} t \right\} \tag{2}$$

où

$$\omega_{n',n} = \omega_{n'} - \omega_n = \frac{E_{n'}}{\hbar} - \frac{E_n}{\hbar} \tag{3}$$

pourra être réécrite sous la forme d'une somme simple :

$$f \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \langle N+k | f | N \rangle \exp\left\{ i \omega_{N+k,N} t \right\} \tag{4}$$

Or à quantification discrète correspond mouvement classique périodique. A ce titre la grandeur f associée à la particule sera elle même périodique et donc développable en série de Fourier (que nous écrirons, sous forme complexe) :

$$f = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(N)} e^{ik\omega t} \tag{5}$$

On voit dès lors en quoi consiste l'approximation classique. Elle dit que :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\langle N+k|\, f\,|N\rangle}{C_k^{(N)}} = 1 \tag{6}$$

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\omega_{N+k,N}}{\omega} = k \tag{7}$$

Ce sont ces formules que nous nous sommes efforcés de vérifier à travers quatre exemples substantiels et importants au point de vue classique ou quantique, voire même des deux à la fois.

Dans (5) nous avons écrit $C_k^{(N)}$, car les mouvements classiques auxquels on va faire correspondre les traitements quantiques seront ceux où l'on prendra pour énergies (et moments angulaires) les valeurs quantiques E_N (et $L^2 = \hbar^2 \ell(\ell+1)$) qui en effet sont, a priori, toujours classiquement admissibles.

Notre propos, d'apparence fort simple, va soulever de considérables problèmes de calcul, essentiellement d'ailleurs de calcul intégral puisque le problème fondamental y sera de calculer les éléments de matrice diagonaux ou extradiagonaux de f. Ceci nous amènera à d'intéressantes extensions du formulaire intégral disponible, portant sur les fonctions spéciales.

Enfin l'étude du passage à la limite nous fera examiner en profondeur la structure des fonctions spéciales et en particulier la restitution limite, par elles, de fonctions élémentaires.

CHAPITRE VI

LES MOUVEMENTS PERIODIQUES CLASSIQUES ET LES COEFFICIENTS DE FOURIER

- *EXEMPLES TRAITES*

Les exemples, élémentaires ou non, de mouvements périodiques qui soient étudiés en même temps en traitement quantique sont très peu nombreux. Nous en avons retenu quatre :

l'oscillateur linéaire
l'oscillateur spatial, sa généralisation naturelle
la particule dans le champ (attractif) keplerien
la particule libre dans une sphère infranchissable.

- *L'OSCILLATEUR LINEAIRE*

C'est l'exemple le plus simple de tous bien entendu, mais malgré cela (et peut être bien en raison de cela) jamais une étude définitive n'en a été proposée. Nous, compte tenu de la simplicité du problème, nous donnons le traitement au plus haut niveau, ce en classique aussi bien qu'en quantique. Pour ce qui est du classique, au lieu de nous contenter de la série de Fourier :

(1) $$x = a \cos \omega t \qquad (\text{où } \omega = \sqrt{\frac{K}{m}}\text{, K coef. de rappel})$$

ordinaire, nous donnerons la série de Fourier de x^M. Moyennant l'identité

(2) $$\cos^M\theta = \sum_k \frac{1}{2^M} C_M^{\frac{M-k}{2}} e^{ik\theta} \qquad (k \text{ variant de 2 en 2, de } -M \text{ à } +M)$$

on aura en effet :

(3) $$x^M = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(M)} e^{ik\omega t}$$

avec

$$(4) \qquad C_k^{(M)} = \begin{cases} 0 & |k| > M \\ 0 & k \text{ non congru à } M \bmod 2 \\ \frac{a^M}{2^M} C_M^{\frac{M-k}{2}} & |k| \leq M,\ k \text{ congru à } M \bmod 2. \end{cases}$$

Les seules énergies classiquement admissibles sont les énergies positives. L'amplitude a est liée alors à E, par

$$(5) \qquad a = \sqrt{\frac{2E}{K}}$$

En traitement quantique les énergies admissibles sont en spectre discret :

$$(6) \qquad E_n = (n + \tfrac{1}{2})\,\hbar\omega \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Elles sont positives donc classiquement admissibles. A cet égard, la série de Fourier que nous formons est celle correspondant à $E = E_N$ (N grand). On aura pour les coefficients de Fourier non nuls :

$$(6) \qquad C_k = \frac{1}{2^M}(2n+1)^{\frac{M}{2}} x_o^M C_M^{\frac{M-k}{2}} \qquad \text{(k variant de 2 en 2 de -M à +M)}$$

avec

$$(7) \qquad x_o = \sqrt{\hbar \frac{\omega}{K}} = \sqrt{\frac{\hbar}{\sqrt{Km}}}$$

- *L'OSCILLATEUR SPATIAL ISOTROPE*

Ce problème constitue la généralisation naturelle du précédent. Toutefois le précédent nécessite une étude distincte et surtout en traitement quantique car l'étude se fait pour l'un en coordonnées cartésiennes, pour l'autre en coordonnées sphériques.
L'oscillateur spatial c'est la particule de masse m, dans le champ de rappel à symétrie sphérique.

(8) $$U = \frac{K}{2} r^2$$

Les trajectoires sont des ellipses dont le centre de forces occupe le centre de symétrie. L'excentricité vaut :

(9) $$e^2 = 1 - \frac{\lambda - \sqrt{\lambda^2 - 1}}{\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1}}$$

où

(10) $$\lambda = \frac{E}{L\omega} \qquad (\omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \ ; \ E, L \text{ donnés}).$$

Le demi-grand axe vaut :

(11) $$a^2 = \frac{L\omega}{K} \ (\lambda + \sqrt{\lambda^2 - 1})$$

L'évolution du rayon vecteur $\vec{r}$ (t) est périodique, on pourra donc développer en série de Fourier, r, ou plutôt r^2 et d'une manière générale r^{2p} .
On choisit les puissances paires, pour des raisons de commodité évidentes, on a en effet tout aussitôt, à partir des équations paramétriques des trajectoires :

(12) $$\begin{aligned} x &= a \cos \omega t \\ y &= b \sin \omega t \end{aligned}$$

(13) $$\frac{r^2}{a^2} = (1 - \frac{e^2}{2}) + \frac{e^2}{2} \cos 2\omega t$$

soit, en complexe :

(14) $$r^2 = C_{-2} e^{-2i\omega t} + C_o + C_2 e^{2i\omega t}$$

avec :

(15) $$C_o = (1 - \frac{e^2}{2}) a^2 \ ; \ C_2 = C_{-2} = \frac{a^2 e^2}{4} \ ; \ C_1 = C_{-1} = C_3 = C_{-3} = \ldots = 0$$

En terme des données physiques E et L, on a pour les coefficients de Fourier non nuls :

(16) $$C_o = \frac{E}{K} \ ; \quad C_2 = \frac{(E^2 - L^2\omega^2)^{\frac{1}{2}}}{2K}$$

En traitement quantique du problème on aura pour seules énergies admissibles, le spectre discret :

$$E_n = (N + \frac{1}{2})\,\hbar\omega \tag{17}$$

avec pour moment angulaire :

$$L^2 = \ell(\ell+1)\,\hbar^2 \tag{18}$$

où ℓ est un entier pris dans les valeurs N, N-2, ... $\varepsilon(N)$.
Considérons en traitement classique le mouvement pour E_N (N grand) et L du type (18). Tous calculs faits, nous avons obtenu alors pour coefficients de Fourier non nuls :

$$C_o = r_o^2\,(N + \frac{3}{2}) \tag{19}$$

$$C_2 = \frac{r_o^2}{2}\left\{(N + \frac{3}{2})^2 - \ell(\ell+1)\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{20}$$

avec

$$r_o = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{K}} \tag{21}$$

Notons qu'en traitement classique, E et L pour être <u>simultanément</u> admissibles doivent conduire à $e < 1$, donc doivent d'après (9) et (10) satisfaire à

$$\lambda > 1 \tag{22}$$

Or on peut vérifier que même en prenant pour E et L les valeurs quantiques indiquées, il en est bien ainsi. En effet, la valeur minimale de λ, compte tenu de la latitude de choix sur ℓ, dûe à la dégénérescence de E_N, est :

$$\lambda_{min} = \frac{N + \frac{3}{2}}{\sqrt{N(N+1)}} > 1 \tag{23}$$

D'une manière plus générale nous avons pu obtenir, au terme d'un calcul considérablement plus laborieux, la série de Fourier de r^{2p}. En terme de λ (qui est retenu pour paramètre puisque, lié directemen

excentricité, il sera maintenu constant lors du passage à la limite) nous avons obtenu

$$r^{-p} = \sum_{q=-p}^{p} C_{2q}^{(2p)} e^{2iq\omega t} \tag{24}$$

avec

$$\begin{cases} C^{(2\cdot)} = r_o^{2p} (N + \frac{3}{2})^p \sum_{u=0}^{\left[\frac{p-q}{2}\right]} \left\{ \left(\frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}} \right)^{2u+|q|} C_p^u \, C_{p-u}^{u+|q|} \right\} \\ q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm p \ . \end{cases} \tag{25}$$

L'ATOME D'HYDROGENE

Il s'agit là du problème le plus important de la Mécanique Quantique, sur lequel nous espérons avoir apporté une modeste contribution. En version classique, il s'agit d'une masse μ , en mouvement dans le champ attractif :

$$U = \frac{K}{r} \qquad (K < 0) \tag{26}$$

Pour une énergie E négative, mais pas trop (et quel que soit le moment dans certaines limites) la trajectoire est une ellipse dont le centre des forces occupe l'un des foyers. De façon précise si

$$-\frac{1}{2} \mu \frac{K^2}{L^2} < E < 0 \tag{27}$$

l'excentricité et le demi grand axe valent :

$$e^2 = 1 + \frac{2}{\mu} \frac{L^2}{K^2} E \tag{28}$$

$$a = \frac{1}{2} \frac{|K|}{|E|} \tag{29}$$

L'évolution du rayon vecteur $\vec{r}$ (t) étant périodique, on développe en particulier r ou plutôt $\frac{1}{r}$ en série de Fourier. On choisit $\frac{1}{r}$ pour des raisons de commodité. En effet Lagrange et Bessel ont établi ces développements

$$\frac{r}{a} = 1 + \frac{e^2}{2} - 2e \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J'_n(ne)}{n} \cos n\omega t \tag{30}$$

$$\frac{a}{r} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_n(ne) \cos n\omega t \tag{31}$$

Rappelons que ce sont précisément ces développements que, 145 ans après leurs illustres auteurs, nous avons réétudiés et généralisés au chapitre IV (§ 2, formule (29), § 3, formule (46)).

On voit sur (31) que le coefficient de Fourier de $\frac{1}{r}$ est plus simple que celui de r. Cela se reportera sur l'étude de l'approximation classique, où le passage à la limite pour r sera plus laborieux que pour $\frac{1}{r}$.

Passant en complexe, nous avons :

$$\frac{1}{r} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(-1)} e^{ik\omega t} \tag{32}$$

avec

$$C_k^{(-)} = C_{-k}^{(-1)} = \frac{1}{a} J_k(ke) \qquad k = 0,1,2,\ldots. \tag{33}$$

et

$$r = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k^{(1)} e^{ik\omega t} \tag{34}$$

avec

$$C_k^{(1)} = C_{-k}^{(1)} = -ae \frac{J'_k(ke)}{k} \qquad k = 1,2,\ldots \tag{35}$$

$$C_o^{(1)} = a\left(1 + \frac{e^2}{2}\right) \tag{36}$$

En traitement quantique on obtient pour valeurs admissibles de l'énergie, en particulier le spectre discret :

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{\mu K^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \qquad n = 1,2,\ldots. \tag{37}$$

tandis que

$$L^2 = \ell(\ell + 1)\hbar^2 \tag{38}$$

où ℓ est un entier pris entre 0 et n (n exclu, 0 inclus).

Prenant, en traitement classique de telles valeurs quantiques, nous avons pu réécrire

(39) $$e^2 = 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{n^2}$$

(40) $$a = \frac{n^2\hbar^2}{\mu|K|}$$

(41) $$\omega = \frac{\mu K^2}{\hbar^3}\ \frac{1}{n^3} = n^2\ r_o \quad (\text{avec } r_o = \frac{\hbar^2}{\mu|K|})$$

(42) $$C_k^{(-1)} = \frac{1}{n^2 r_o}\ J_k\left(k\sqrt{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{n^2}}\right) \quad (k = 0,1,2,\ldots)$$

(43) $$\begin{cases} C_o^{(1)} = r_o\left\{\frac{3}{2}n^2 - \frac{\ell(\ell+1)}{2}\right\} \\ C_k^{(1)} = -r_o n^2\sqrt{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{n^2}}\ \frac{J'_k}{k}\left(k\sqrt{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{n^2}}\right) \end{cases}$$

Notons en fait qu'il vaut mieux utiliser (33) et (35) avec en plus (39), puisque le passage à la limite quantique → classique, se fera précisément à e constant.
D'une manière plus générale on connaît le coefficient de Fourier C_o d'une puissance quelconque de r. On aura :

(44) $$\frac{C_o^{(M)}}{r_o^M} = n^{2M} \sum_{u \geqslant 0} C_{2M+1}^{2u}\ \frac{(2u-1)!!}{2u!!}\ e^{2u}$$ (e est l'excentricité).

- *LA PARTICULE DANS LE TROU SPHERIQUE*

"La particule dans le trou" c'est un problème classiquement sans grand intérêt : il s'agit somme toute d'une simple masse μ emprisonnée à l'intérieur d'une sphère infranchissable sur la paroi - interne - de laquelle elle subit des rebonds par suite de chocs parfaits. Par contre en traitement quantique le problème a plus d'intérêt: ce sera la

"particule dans un puits de potentiel, à symétrie sphérique, infiniment profond", qui est une des premières applications de la résolution de l'équation de Schrodinger en coordonnées sphériques dans l'espace illimité.

Pour nous l'intérêt est ailleurs : c'est un cas en effet qui se prêtera à notre propos. Et cela d'une manière particulièrement heureuse précisément. En outre l'examen de cet exemple à première vue anodin nous a conduit à élaborer des extensions importantes du formulaire intégral (concernant essentiellement les "intégrales de Lommel").

Le très sérieux centre de calcul du CERN a édité récemment des tables numériques de ces intégrales [38], que nous, précisément à l'occasion de ce problème, avons explicitées analytiquement comme des fractions rationnelles des zéros de fonctions de Bessel.

Enfin d'une manière encore plus fondamentale cet exemple nous paraît important car il nous ouvre la voie à l'étude de systèmes limités (tel "l'oscillateur limité") où l'on traiterait tout le potentiel comme une perturbation, mais dans une sphère seulement de rayon a et non dans tout l'espace.

L'étude classique du problème, extrêmement facile se présente comme suit : la particule décrit une ligne polygonale régulière, inscrite dans un plan diamétral et non nécessairement fermée. Entre 2 chocs sur la paroi, le mouvement est rectiligne uniforme (la particule étant libre). La vitesse est toujours la même, l'énergie E et le moment angulaire L sont conservés. Nous avons établi que, vitesse, apothème, côté, pulsation, sont donnés par :

$$(45)\qquad v = \sqrt{\frac{2}{\mu}E}\ ;\quad d = \frac{L}{\sqrt{2\ \mu E}}\ ;\quad c = 2\sqrt{a^2 - \frac{L^2}{2\ \mu E}}\ ;\omega = 2\pi\ \frac{E}{\left[2\mu a^2 E - L^2\right]^{\frac{1}{2}}}$$

L'évolution du rayon vecteur $\vec{r}(t)$ est périodique (pulsation ω), à ce titre r, ou plus commodément r^2 ou r^{2p} sont développables en série de Fourier. Nous avons obtenu :

$$(46)\qquad r^2 = \sum_{-\infty}^{\infty} C_k\ e^{ik\omega t}$$

avec

$$(47)\qquad C_o^{(2)} = \frac{1}{3}\left[a^2 + \frac{L^2}{\mu E}\right]\ ;\quad C_k^{(2)} = \frac{2}{\pi^2 k^2}\left[a^2 - \frac{L^2}{2\mu E}\right]$$

En traitement quantique de ce problème, nous aurons des énergies discrètes

$$E_n = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} X_{n\ell}^2 \qquad n = 1,2.... \qquad \ell = 0,1,2.... \tag{48}$$

où $X_{n\ell}$ est le $n^{ième}$ zéro positif de $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$, tandis que

$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$.

Considérant en traitement classique de telles valeurs quantiques, nous aurons :

$$C_o^{(2)} = \frac{a^2}{3}\left\{1 + \frac{2\ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}\right\} \qquad \text{(pour } n \to N \text{ grand)} \tag{49}$$

$$C_k^{(2)} = \frac{2a^2}{\pi^2 k^2}\left\{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}\right\} \qquad (k \neq 0) \tag{50}$$

$$\omega = \frac{\hbar\pi}{\mu a^2}\sqrt{\frac{X_{N\ell}}{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}}} \tag{51}$$

D'une manière plus générale, si pour r^2 nous obtenions :

$$C_o^{(2)} = d^2 + \frac{c^2}{12} \quad ; \qquad C_k^{(2)} = \frac{c^2}{2\pi^2 k^2} \quad , \tag{47 bis}$$

pour r^4 nous aurons :

$$C_o^{(4)} = d^4 + \frac{c^2 d^2}{6} + \frac{c^4}{80} \quad ; \quad C_k^{(4)} = \left(\frac{c^4}{4} + c^2 d^2\right)\frac{1}{\pi^2 k^2} - \frac{3}{2}\frac{c^4}{\pi^4 k^4} \tag{52}$$

D'une manière totalement générale, nous avons pu former la série de Fourier de r^M. Les coefficients de Fourier s'y présentent sous forme de séries infinies si M est impair, et de sommes finies si M est pair, ce qui explique que le choix des M = 2p est donc plus commode. Pour ces cas nous avons eu pour le premier coefficient :

$$C_o^{(2p)} = \frac{a^{2p}}{2p+1}\sum_{s=0}^{p}\left\{\frac{2p!!}{(2p-1)!!}\,\frac{(2s-1)!!}{(2s)!!}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}\right]^{p-s}\right\} \tag{53}$$

ainsi que bien d'autres résultats que nous omettons ici.

CHAPITRE VII

LE TRAITEMENT QUANTIQUE ET LE PRINCIPE DU CALCUL DES ELEMENTS DE MATRICE

- *L'OSCILLATEUR LINEAIRE*

Les fonctions d'ondes orthonormées de ce problème s'écrivent au moyen des polynômes d'Hermite :

$$\Psi_n(x,t) = \psi_n(x) \quad \exp\{-i\omega_n t\} \tag{1}$$

$$\psi_n(x) = \mathcal{N}_n \; H_n\left(\frac{x}{x_o}\right) \; \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x}{x_o}\right)^2\right\} \tag{2}$$

$$\mathcal{N}_n = \frac{1}{\sqrt{x_o 2^n n! \sqrt{\Pi}}} \tag{3}$$

$$\omega_n = \frac{E_n}{\hbar} = (n+\frac{1}{2})\omega \tag{4}$$

$$E_n = (n+\frac{1}{2})\hbar\omega \qquad (L = 0) \tag{5}$$

$$x_o = \sqrt{\frac{\hbar\omega}{K}} \; . \tag{6}$$

Les éléments de matrice de x^M, donnés par

$$< n' | x^M | n > = \int_{-\infty}^{+\infty} x^M \; \psi_{n'}^{*} \; \psi_n \; dx \tag{7}$$

se calculent par :

$$< n' | x^M | n > = \frac{x_o^M}{\sqrt{2^{n+n'} \; n! \; n'! \; \Pi}} \; I_{n',n}(M) \tag{8}$$

où

$$I_{n',n}(M) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^M \; e^{-x^2} \; H_{n'}(x) \; H_n(x) \, dx \tag{9}$$

- *L'OSCILLATEUR SPATIAL*

La solution de ce problème est souvent maladroitement exposée

chez les Auteurs - pour des raisons de facilité - à l'aide de 2 nombres quantiques n,ℓ. C'est ainsi que l'on a :

(10) $$E_{n\ell} = (2n + \ell + \frac{3}{2})\hbar\omega$$

(11) $$\psi_{n\ell m}(r\theta\phi) = \mathcal{N}_{n\ell}\ \mathcal{R}_{n\ell}(r)\ Y_{\ell m}(\theta,\phi)$$

(12) $$\mathcal{N}_{n\ell} = \frac{2^{1/2}}{r_o^{3/2}} \left\{\frac{n!}{\Gamma(n+\ell+\frac{3}{2})}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_{n\ell}} \quad (e^{i\theta_{n\ell}} \text{ facteur de phase à choisir})$$

(13) $$\mathcal{R}_{n\ell}(r) = (\frac{r}{r_o})^{\ell}\ \exp\left\{-\frac{1}{2}(\frac{r}{r_o})^2\right\} L_n^{(\ell+\frac{1}{2})}\left((\frac{r}{r_o})^2\right)$$

$$n = 0,1,2,... \qquad \ell = 0,1,2,...$$

Posant $N = 2n+\ell$, nous réexposons la solution mais à présent avec un seul nombre quantique pour l'énergie, ce qui s'avère plus commode pour nos considérations. Notons toutefois que pour la particule dans le trou, on ne pourra pas simplifier de la sorte mais que l'on peut toutefois dominer le problème. Mais en ce dernier cas l'énergie ne sera pas dégénérée par rapport au moment angulaire. Par contre ici, comme pour l'atome d'hydrogène l'énergie est dégénérée par rapport au moment angulaire (cf $\ell = 0,...n-1$, soit n fois pour E_n).
Il vaut mieux ici séparer les nombres quantiques. Nous écrivons donc :

(14) $E_N = (N+\frac{3}{2})\hbar\omega$ $\qquad N = 0,1,2,...$ $\qquad (\infty^{té}$ de valeurs)

(15) $L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2$ $\qquad \ell = N,N-2,...\varepsilon(N)$ $\qquad (1+[\frac{N}{2}]$ valeurs)

(16) $L_z = m\hbar$ $\qquad m = -\ell,+\ell$ $\qquad (2\ell+1$ valeurs)

Le niveau E_N au total $\frac{1}{2}(N+1)(N+2)$ fois dégénéré, l'est $[\frac{N}{2}]+1$ par rapport à L^2.
Les fonctions d'ondes s'écrivent :

(17) $$\psi_{N\ell m}(r\theta\phi) = \mathcal{N}_{N\ell}\ \mathcal{R}_{N\ell}(r)\ Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

(18) $$\mathcal{N}_{N\ell} = \frac{2^{1/2}}{r_o^{3/2}} \left\{\frac{(\frac{N-\ell}{2})!}{\Gamma(\frac{N+\ell+3}{2})}\right\}^{\frac{1}{2}} e^{i\theta_N}$$

(19) $$\mathcal{R}_{N\ell}(r) = \left(\frac{r}{r_o}\right)^{\ell} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right\} L^{(\ell+\frac{1}{2})}_{\frac{N-\ell}{2}}\left(\left(\frac{r}{r_o}\right)^2\right)$$

Les $L_n^{(\gamma)}(z)$ sont les polynômes de Laguerre généralisés. Le facteur de phase devra être choisi, pour assurer le raccordement à la limite classique, égal à $e^{i\frac{N}{2}\pi}$.

Les éléments de matrice de r^2 qui s'écrivent

(20) $$< N'\ell'm' | r^2 | N\ell m > = \iiint r^2 \, \psi^*_{n'\ell'm'} \, \psi_{n\ell m} \, dV$$

se calculeront, après le changement $(\frac{r}{r_o})^2 = t$, par

(21) $$< N'\ell'm' | r^2 | N\ell m > = \mathcal{N}^*_{N'\ell'} \, \mathcal{N}_{N\ell} \, \frac{r_o^5}{2} \, I^1_{\frac{N-\ell}{2}, \frac{N'-\ell'}{2}}(\ell+\tfrac{1}{2}, \ell+\tfrac{1}{2}) \times \delta_{\ell\ell'} \, \delta_{mm'}$$

où

(22) $$I^p_{nn'}(\alpha,\alpha') = \int_0^\infty t^{\frac{\alpha+\alpha'}{2}+p} \, e^{-t} \, L_n^{(\alpha)}(t) \, L_{n'}^{(\alpha')}(t) \, dt$$

Ici on voit que l'on n'aura besoin des intégrales I que pour $\alpha = \alpha'$. D'une manière plus générale nous aurons :

(23) $$< N'\ell'm' | \left(\frac{r}{r_o}\right)^{2p} | N\ell m > = \frac{r_o^3}{2} \, \mathcal{N}^*_{N'\ell'} \, \mathcal{N}_{N\ell} \, I^p_{\frac{N-\ell}{2}, \frac{N'-\ell'}{2}}(\ell+\tfrac{1}{2}, \ell'+\tfrac{1}{2}) \times \delta_{\ell\ell'} \, \delta_{mm'}.$$

- *L'ATOME D'HYDROGENE*

La solution bien connue de ce problème s'écrit au moyen des fonctions de Laguerre :

(24) $$\psi_{n\ell m}(R\theta\phi) = R_{n\ell}(r) \, Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

(25) $$R_{n\ell}(r) = -\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-\ell-1)!}{[(n+\ell)!]^3}} \, \frac{1}{r_o^{3/2}} \exp\left(-\frac{r}{nr_o}\right)\left(2\frac{r}{nr_o}\right)^{\ell} \mathcal{L}^{2\ell+1}_{n+\ell}\left(2\frac{r}{nr_o}\right)$$

(26) $$\mathcal{L}^m_n(z) = (-1)^m \frac{(n!)^2}{m!(n-m)!} F(-(n-m), m+1 ; z)$$ (notations de Landau)

tonctions de Laguerre :

La solution bien connue de ce problème s'écrit au moyen des

(24)

(25)

(26)

(27) $$r_o = \frac{\hbar^2}{\mu |K|}$$

(28) $$E_n = -\frac{1}{2} \frac{\mu K^2}{\hbar^2} \frac{1}{n^2} \qquad n = 1,2,\ldots$$

(29) $$L^2 = \ell(\ell+1)\hbar^2 \qquad \ell = 0,1,\ldots n-1 \qquad (n \text{ valeurs})$$

(30) $$L_z = m\hbar \qquad m = -\ell,\ldots+\ell \qquad (2\ell+1 \text{ valeurs})$$

L'énergie, 2n+1 fois dégénérée au total, l'est n fois par rapport à L^2.

Les éléments de matrice de r ou $\frac{1}{r}$ s'écrivent après remplacement :

(31) $$< n'|\ell'|m'|r \text{ ou } \frac{1}{r}|n\ell m > = \frac{2^{2\ell+2}}{r_o^{2\ell+3}} \frac{1}{\left[(2\ell+1)!\right]^3} \frac{1}{(nn')^{\ell+2}}$$

$$\left[\frac{(n'+\ell)!\,(n+\ell)!}{(n'-\ell-1)!\,(n-\ell-1)!}\right]^{\frac{1}{2}} J^{(2 \text{ ou } 0)}_{2\ell+2}\left(-(n-\ell-1),\right.$$

$$\left.(-n'-\ell-1), \frac{2}{nr_o}, \frac{2}{n'r_o}\right) \delta_{\ell\ell'}\, \delta_{mm'}$$

où

(32) $$J^s_\gamma(\alpha,\alpha' ; k,k') = \int_0^\infty e^{-\frac{k+k'}{2}z}\, z^{\gamma-1+s}\, F(\alpha,\gamma,kz) F(\alpha',\gamma,k'z)\, dz.$$

Plus particulièrement, on aura pour l'élément diagonal de $r^{\pm 1}$

(33) $$< n\ell m|r \text{ ou } \frac{1}{r}|n\ell m > = \frac{2^{2\ell+2}}{r_o^{2\ell+3}} \frac{1}{\left[(2\ell+1)!\right]^3} \frac{1}{n^{2\ell+4}} \frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!}$$

$$\times \mathcal{J}_{2\ell+4 \text{ ou } 2}\left(-(n-\ell-1), 2\ell+2, \frac{2}{nr_o}\right)$$

où

(34) $$\mathcal{J}_\nu(-n,\gamma,k) = \int_0^\infty e^{-kz}\, z^{\nu-1}\, F^2(-n,\gamma,kz)\, dz.$$

Les intégrales J et $\mathcal{J}$ se calculent par les récurrences dites de Gordon [39], connues dans la littérature.

Les $\mathcal{J}$ y seront entièrement explicitées, les J y restent calculables de proche en proche seulement. C'est pourquoi nous avons étudié nous mêmes la question pour une explicitation totale, en procédant quant à nous directement par d'autres méthodes.

Pour l'instant, disons que l'élément diagonal le plus général, celui de r^M, est explicitable à partir de la littérature puisqu'il se calcule à partir des par :

$$(35)\quad \langle n\ell m|r^M|n\ell m\rangle = \frac{2^{2\ell+2}}{r_o^{2\ell+3}} \frac{1}{[(2\ell+1)!]^3} \frac{1}{n^{2\ell+4}} \frac{(n+\ell)!}{(n-\ell-1)!} \mathcal{J}_{2\ell+M+3}\left(-(n-\ell-1),\ 2\ell+2,\ \frac{2}{nr_o}\right)$$

Précisons à cet égard que l'élément extradiagonal de r^M se calcule par (31) où s = M+1.

- *LA PARTICULE DANS LE TROU SPHERIQUE*

La solution de ce problème est une application disions-nous de la résolution de l'équation de Schroedinger en sphériques, lorsque U = 0.
Par séparation des variables on parvient en effet à des solutions du type

$$j_\ell(\lambda r)\ Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

où $j_\ell(\lambda r)$ est la fonction sphérique de Bessel :

$$(36)\quad j_\ell(z) = \sqrt{\frac{\pi}{2z}}\ J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$$

Imposant la nullité des fonctions d'onde sur la paroi du puits (infranchissable) on obtient

$$(37)\quad \lambda = \frac{X_{n\ell}}{a}$$

où $X_{n\ell}$ désigne le $n^{ième}$ zéro, positif, de $j_\ell(z)$ ou de $J_{\ell+\frac{1}{2}}(z)$.
Renonçant à parler des fonctions sphériques de Bessel (grâce à 36) nous obtenons :

$$(38)\quad E_{n\ell} = \frac{\hbar^2}{2\mu a^2} X_{n\ell}^2 \qquad (n = 1,2\ldots \qquad \ell = 0,1,2,\ldots)$$

$$(39)\quad \psi_{n\ell m}(r\theta\phi) = N_{n\ell}\ R_{n\ell}(z)\ Y_{\ell m}(\theta\phi)$$

$$(40)\quad R_{n\ell}(r) = \frac{2}{\sqrt{r}}\ J_{\ell+\frac{1}{2}}\left(\frac{X_{n\ell}}{a}\ r\right)$$

Un calcul aisé (mais rarement rencontré, pour ne pas dire jamais, dans les manuels de Mécanique Quantique, il se trouve curieusement dans les traités d'Electromagnétisme) de normalisation donne :

$$N_{n\ell} = \frac{\sqrt{2}}{a\, J'_{\ell+\frac{1}{2}}(X_{n\ell})} \tag{41}$$

{ On notera avec soin que ce coefficient de normalisation est
{ différent par fonction d'onde.

Les éléments de matrice de r^2 ou de r^{2p} plus généralement se calculeront à l'aide de la formule :

$$\langle n'\ell'm' | r^{2p} | n\ell m \rangle = \frac{2}{a^2 J'_{\ell+\frac{1}{2}}(X_{n'\ell'}) J'_{\ell+\frac{1}{2}}(X_{n\ell})} \; I^{\frac{1}{2}}_{n'n}(2p+1; \ell+\tfrac{1}{2}; \ell+\tfrac{1}{2}) \; \delta_{\ell\ell'} \; \delta_{mm'} \tag{42}$$

où l'on a posé en général :

$$I^{\frac{1}{2}}_{n\bar{n}}(\mu,\nu,\bar{\nu}) = \int_0^a r^{\mu} \mathcal{C}_{\nu}\left(\frac{x_{\nu n}}{a} r\right) \bar{\mathcal{C}}_{\bar{\nu}}\left(\frac{x_{\bar{\nu}\bar{n}}}{a} r\right) dr \tag{43}$$

$\mathcal{C}_{\nu}$ désignant une fonction de Bessel de 1^{e} espèce (voire de 2^{e} d'ailleurs), $x_{\nu n}$ en désignant le $n^{ième}$ zéro positif. La barre correspond à une autre fonction de cette nature.

Le calcul des intégrales I peut se raccorder d'une façon théorique à celui des intégrales

$$\mathcal{J}^{\frac{1}{2}}_{\lambda\bar{\lambda}}(\mu,\nu,\bar{\nu}) = \int_0^z z^{\mu} \mathcal{C}_{\nu}(\lambda z) \; \bar{\mathcal{C}}_{\bar{\nu}}(\bar{\lambda} z) dz \tag{44}$$

C'est ce problème, généralisant les intégrales de Lommel, que nous avons particulièrement travaillé dans notre publication citée.

CHAPITRE VIII

CONTRIBUTIONS A L'EXTENSION DE DIVERS FORMULAIRES INTEGRAUX, NOTAMMENT CELUI DE LOMMEL-SONINE

- *INTEGRALES D'HERMITE*

Il s'agit de calculer en toute généralité les intégrales (9), § 1, Ch VII.

On dispose dans la littérature des premières seulement :

$$(1) \qquad I_{n',n}(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2} H_{n'}(x) H_n(x)\,dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}\, \delta_{nn'}$$

$$(2) \qquad I_{n',n}(1) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\, e^{-x^2} H_{n'}(x) H_n(x)\,dx = 2^n (n+1)!\sqrt{\pi}\, \delta^{n'}_{n+1} + 2^{n-1}\, n!\sqrt{\pi}\, \delta^{n'}_{n-1}$$

Notre méthode pour le calcul général sera l'emploi de la fonction génératrice des polynômes d'Hermite :

$$(3) \qquad \varphi(s\ ;\ x) = e^{-s^2+2sx} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{s^n}{n!} H_n(x)$$

Ecrivant (3) avec t au lieu de s, multipliant membre à membre l'équation obtenue avec (3), puis le résultat par $e^{-x^2}\, x^M$, intégrant sur $(-\infty,\infty)$, on obtiendra en effet,

$$(4) \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, x^M\, \varphi(s\ ;\ x)\, \varphi(t,x)\,dx = \sum_n \sum_{n'} \frac{s^n}{n!} \frac{t^{n'}}{n'!} I_{nn'}(M)$$

Le problème de calculer la famille d'intégrales I est réduit au calcul d'une seule intégrale.

Faisant intervenir la fonction gamma

$$(5) \qquad \Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$$

j'ai obtenu après détails divers relatés dans notre publication, par identification :

(6) $$I_{nn'}(M) = n!\, n'!\, \sum \frac{2^p}{p!}\, C_M^{n+n'-2p}\, C_{n+n'-2p}^{n-p}\, \Gamma\left(\frac{M-n-n'}{2} + p + \frac{1}{2}\right)$$

$n > M$

$n' = n-M, \ldots, n+M$ (de 2 en 2).

Avec

(7) $$\Gamma\left(q+\frac{1}{2}\right) = \frac{(2q)!}{2^{2q}\, q!}\sqrt{\pi}$$

on a :

(8) $$I_{n,n+k}(M) = \sqrt{\pi}(n+k)!\; 2^{n-\frac{M-k}{2}}\; \frac{M!}{\left(\frac{M+k}{2}\right)!}\; L_{nk}^{(M)} \quad (k = -M, \ldots, M, \text{ de } 2 \text{ en } 2)$$

où

(9) $$L_{nk}^{(M)} = \sum_q \frac{1}{2^q}\, C_n^{\frac{M-k}{2}-q}\, C_{\frac{M+k}{2}}^{q}$$

Toutes les autres intégrales sont nulles.
Les coefficients L peuvent s'exprimer en terme de la fonction hypergéométrique. Nous obtenons en définitive :

(10) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\, x^M\, H_n(x)\, H_{n+k}(x)\, dx = 2^{n-M+k}\sqrt{\pi}\; \frac{M!\,(n+k)!}{\left(\frac{M-k}{2}\right)!\,k!}\; F\left(-n, \frac{M-k}{2}, k+1, 2\right)$$

$(k = M, M-2, \ldots, \varepsilon(M))$

Signalons que des chercheurs [40] - chimistes de profession il est vrai - ont étudié ce problème mais tout en allant très loin ils n'explicitent pas le résultat général. Leur méthode reste une récurrence de proche en proche. Pire, ils élaborent des théories assez sophistiquées sans prendre conscience de la présence dans leurs résultats de la fonction hypergéométrique. Reconstituer les propriétés et les récurrences de cette fonction sans la reconnaitre ni la nommer, il faut reconnaître que c'est passer vraiment à côté !

- *INTEGRALES DE LAGUERRE*

Il s'agit ici de calculer en toute généralité les intégrales (22), § 2, Ch VII ; à nouveau nous pratiquons la méthode de la fonction génératrice que nous jugeons à cet égard des plus commodes.

On a :

$$(11) \qquad \phi_\alpha(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(t)x^n = (1-x)^{-\alpha-1} \exp\left\{-\frac{x}{1-x}t\right\}$$

Ecrivant (11) pour y au lieu de x, avec un indice muet n' différent, multipliant membre à membre, puis par $e^{-t}\ t^{\alpha+p}$ et enfin intégrant par rapport à t sur $0, \infty$, on obtient

$$(12) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-t}\ t^{\alpha+p} \phi_\alpha(x,t)\phi_\alpha(y,t)dt = \sum_n \sum_{n'} I^{(p)}_{nn'}(\alpha)x^n\ y^{n'}$$

A nouveau, utilisant la fonction Γ, après de nombreux détails divers, nous obtenons, par identification, notre formule

$$(13) \qquad \int_0^{+\infty} t^{\alpha+p}\ e^{-t}\ L_n^\alpha(t)\ L^\alpha_{n+k}(t)dt = (-1)^k \sum_u \frac{\Gamma(\alpha+p+n+1-u)}{(n-u)!}\ C_p^u\ C_p^{k+u}$$

(k de $-\min(n,p)$ à p ; p entier positif quelconque).

On aura en particulier

$$(14) \qquad \int_0^{\infty} e^{-t}\ t^{\alpha+1}\ (L_n^\alpha(t))^2 dt = (\alpha+2n+1)\ \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}$$

$$(15) \qquad \int_0^{\infty} e^{-t}\ t^{\alpha+1}\ L_n^\alpha(t)\ L^\alpha_{n+1}(t)dt = -\frac{\Gamma(\alpha+n+2)}{n!}$$

etc...

- *INTEGRALES DE GORDON*

On trouve dans la littérature l'expression toute explicitée de l'intégrale $\mathcal{J}$ (Ch VII, § 3, (34)), soit :

$$(16) \qquad \mathcal{J}_\nu(-n,\gamma,k) = \frac{\Gamma(\nu)n!}{k^\nu \gamma_{(n)}} \sum_{u=0}^{n} \frac{n_{(u)}}{(u!)^2}\ \frac{(\gamma-\nu-u)^{(2u)}}{\gamma^{(u)}}$$

$n_{(p)}$ et $n^{(p)}$ désignent respectivement les factorielles descendantes et ascendantes.

Pour ce qui est de l'intégrale $\mathcal{J}$ (Ch VII, § 3, (32)) on ne dispose que d'une récurrence et du terme initial, à savoir :

$$(17)\qquad J_{\gamma}^{(0)}(\alpha,\alpha',k,k') = 2^{\gamma}\,\Gamma(\gamma)(k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma}(k'-k)^{\alpha}(k-k')^{-\alpha'}\times$$

$$\ldots \times F\left(\alpha,\alpha',\gamma,\ -\frac{4kk'}{(k'-k)^2}\right)$$

$$(18)\qquad J_{\gamma}^{(s+1)}(\alpha,\alpha',k,k') = \frac{4}{k-k'^2}\left\{\left[\frac{\gamma}{2}(k-k')-k\alpha+k'\alpha'-k's\right]J_{\gamma}^{(s)}(\alpha,\alpha',k,k')\right.$$

$$+\ s(\gamma-1+s-2\alpha')J_{\gamma}^{(s-1)}(\alpha\alpha'kk')$$

$$\left.+\ 2s\alpha'\ J_{\gamma}^{(s-1)}(\alpha,\alpha'+1)\right.$$

La mise en oeuvre de cette récurrence nous a conduit aux résultats suivants ;

$$(19)\qquad J_{\gamma}^{(1)}(\alpha,\alpha',kk') = \frac{2^{\gamma+2}}{k^2-k'^2}\left\{\frac{\gamma}{2}(k-k')+(k'\alpha'-k\alpha)\right\}\Gamma(\gamma)(k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma}$$

$$\ldots \times (k'-k)^{-\alpha}(k-k')^{-\alpha'}F\left(\alpha,\alpha',\gamma,\right.$$

$$\left.-\frac{4kk'}{(k-k')^2}\right)$$

$$(20)\qquad J_{\gamma}^{(2)}(\alpha,\alpha',k,k') = \frac{2^{\gamma+2}}{k^2-k'^2}\,\Gamma(\gamma)(k+k')^{\alpha+\alpha'-\gamma}(k'-k)^{-\alpha}(k-k')^{-\alpha'}$$

$$\left\{AF\left(\alpha,\alpha',\gamma,-\frac{4kk'}{(k-k')^2}\right)+\ 2\alpha'\frac{k+k'}{k-k'}\ F\left(\alpha,\alpha'+1,\gamma,\right.\right.$$

$$\left.\left.-\ \frac{4kk'}{(k-k')^2}\right)\right\}$$

avec

$$(21)\qquad A = \frac{4}{k^2-k'^2}\left\{\frac{\gamma}{2}(k-k')+k'\alpha'-k\alpha-k'\right\}\left\{\frac{\gamma}{2}(k-k')+k'\alpha'-k\alpha\right\}+\gamma-2\alpha'.$$

Ces formules seront par la suite particularisées au cas α,α' entiers négatifs. Puis, pour les valeurs adéquates des paramètres on constatera bien heureusement que le coefficient A se réduit considérablement (à 2n').

Jugeant la poursuite de la récurrence de Gordon trop laborieuse, nous avons repris le calcul des intégrales au moyen de la, toujours commode, "méthode de la fonction génératrice".

Soit donc à calculer les intégrales :

$$(22) \qquad I_{nn'}^{\mu\nu\alpha\alpha'}(\lambda,\lambda') = \int_0^\infty e^{-\mu z}\, z^\nu\, L_n^\alpha(\lambda z)\, L_{n'}^{\alpha'}(\lambda' z)\, dz$$

C'est en quelque sorte une reprise du problème des intégrales de Laguerre (cf Ch VII, § 2, (22)) mais ici on considèrera effectivement le cas vraiment général où $\alpha \neq \alpha'$.
Utilisant la même fonction génératrice, nous avons pu obtenir pour notre part, le résultat vraiment général, qui se passe de la récurrence de Gordon, suivant :

$$(23) \quad I_{nn'}^{\mu\nu\alpha\alpha'}(\lambda\lambda') = \sum_{m=0}^{n} \sum_{m'=0}^{n'} (-1)^{n+n'+m+m'} C_{\nu-\alpha}^{n-m}\, C_{\nu-\alpha'}^{n'-m'}\, \frac{\Gamma(m+m'+\nu+1)}{m!\, m'!} \times \ldots$$

$$\ldots \times \frac{(\mu-\lambda)^m (\mu-\lambda')^{m'}}{\mu^{m+m'+\nu+1}}\, F\left(-m;m';-m-m'-\nu;\frac{\mu(\mu-\lambda-\lambda')}{(\mu-\lambda)(\mu-\lambda')}\right)$$

Il y a là une double somme ; c'est bien dans ce sens que s'explicitait, intégrale par intégrale, la récurrence de Gordon. La différence est évidemment que la récurrence est à poursuivre indéfiniment tandis que notre formule règle le problème.

- *INTEGRALES DE LOMMEL SONINE*

C'est ce problème, l'extension du formulaire bien connu de Lommel-Sonine, qui a le plus retenu notre attention. En effet jusqu'ici nous avions affaire à des "polynômes orthogonaux" pour lesquels la méthode de la fonction génératrice s'avérait tout compte fait, des plus rapides. Ici, on a affaire aux fonctions de Bessel qui sont des séries illimitées se prêtant mal à cette méthode. C'est pourquoi nous en sommes revenus à une méthode de Récurrence (comme Gordon). Notre méthode généralise une méthode dûe à Schafheitlin (41) (1906) qui est une formule de récurrence à 2 termes, tandis que la nôtre dans sa plus grande extension, est à 3 termes. Nous calculons ainsi

analytiquement des intégrales qui s'avèrent avoir un intéret particulier dans les domaines les plus divers de la Physique (puisque comme nous l'avons signalé, des chercheurs tels Kölbik, du CERN, ont tabulé de telles intégrales).

Les formules de Lommel s'écrivent :

$$(24)\quad \int_0^z z\,\mathcal{C}_\nu^2(\lambda z)\,dz = \frac{z^2}{2}\left\{\left[1-\frac{\nu^2}{\lambda^2 z^2}\right]\mathcal{C}_\nu^2(\lambda z) + \mathcal{C}'^2_\nu(\lambda z)\right\}$$

$$(25)\quad \int_0^z z\,\mathcal{C}_\nu(\lambda z)\bar{\mathcal{C}}_\nu(\lambda z)\,dz = \frac{1}{2}z^2\left\{\left[1-\frac{\nu^2}{\lambda^2 z^2}\right]\mathcal{C}_\nu(\lambda z)\bar{\mathcal{C}}_\nu(\lambda z) + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots\ \mathcal{C}'_\nu(\lambda z)\bar{\mathcal{C}}'_\nu(\lambda z)\right\}$$

Dans nos notations (Ch VIII, § 4, (44)), ce sont les intégrales très particulières :

$$\mathcal{J}^{1\,2}_{\lambda\lambda}(1,\nu,\nu) \text{ et } \mathcal{J}^{1\,\bar{2}}_{\lambda\lambda}(1,\nu,\nu).$$

Ce que nous avons cherché c'est l'expression des intégrales $\mathcal{J}^{1\,\bar{2}}_{\lambda\bar{\lambda}}(\mu,\nu,\bar{\nu})$.

Nous sommes partis de la récurrence de Schafheitlin (1906) que nous avons retranscrite en nos notations sous la forme :

$$(26)\quad \lambda^2(\mu+2)\mathcal{J}^{1\,2}_{\lambda\lambda}(\mu+2;\nu,\nu) = (\mu+1)\left\{\nu^2-\frac{1}{4}(\mu+1)^2\right\}\mathcal{J}^{1\,2}_{\lambda\lambda}(\mu;\nu,\nu) + \ldots$$
$$+\ \frac{1}{2}\,z^{\mu+1}\left\{\left[\lambda z\,\mathcal{C}'_\nu(\lambda z)-\frac{1}{2}(\mu+1)\mathcal{C}_\nu(\lambda z)\right]^2+\left[\lambda^2 z^2-\nu^2+\frac{1}{4}(\mu+1)^2\right]\mathcal{C}^2_\nu(\lambda z)\right\}$$

A bien examiner le mécanisme d'obtention de cette formule, nous y avons vu des virtualités de généralisations que son auteur lui-même ne parait pas avoir soupçonné. Nous y avons décélé en effet un double processus de réduction d'un type d'intégrale à un autre puis à un autre. (Pour les détails de cette analyse il faut se reporter à notre publication correspondante). Mais alors ce double processus est généralisable au cas des intégrales qui nous préoccupent. Cela nous a permis alors, au moyen de calculs évidemment relativement laborieux d'élaborer une récurrence du type (26) pour nos intégrales. Récurrence qui comme nous l'avons dit sera à trois termes. Ayant

obtenu notre récurrence nous nous sommes préoccupés de la fonder d'une manière purement algèbrique, purement mécanique. C'est ainsi qu'elle nous est apparue comme le résultat de combinaisons d'un certain nombre d'identités de base , par ailleurs évidentes.
Ainsi fondée, la récurrence originelle de Schafheitlin est bien loin et bien élémentaire.
Nous avons obtenu en définitive :

$$(27)\quad \left\{(\bar\lambda^2-\lambda^2)^2(\mu+1)\right\}\ \mathcal{J}^{1\,\bar 2}_{\lambda\bar\lambda}(\mu+4;\nu,\bar\nu)$$

$$= \left\{2(\mu+2)\left[(\bar\lambda^2-\lambda^2)(\bar\nu^2-\nu^2)-(\mu+1)(\mu+3)(\lambda^2+\bar\lambda^2)\right]\right\}\mathcal{J}^{1\,\bar 2}_{\lambda\bar\lambda}(\mu+2;\nu,\bar\nu)$$

$$+\left\{(\mu+3)\left[2(\mu+1)^2(\nu^2+\bar\nu^2)-(\mu+1)^4-(\nu^2-\bar\nu^2)^2\right]\right\}\mathcal{J}^{1\,\bar 2}_{\lambda\bar\lambda}(\mu;\nu,\bar\nu)$$

$$+\ z^{\mu+1}\left\{2(\mu+1)(\mu+3)\left[\lambda z\mathcal{C}'_\nu-\frac{\mu+1}{2}\mathcal{C}_\nu\right]\left[\lambda z\,\bar{\mathcal{C}}_{\bar\nu}-\frac{\mu+1}{2}\bar{\mathcal{C}}_{\bar\nu}\right]\right.$$

$$+\ 2(\mu+1)(\mu+3)\left[\frac{\lambda^2+\bar\lambda^2}{2}\,z^2-\frac{\nu^2+\bar\nu^2}{2}+\frac{(\mu+1)^2}{4}\right]\mathcal{C}_\nu\bar{\mathcal{C}}_{\bar\nu}$$

$$\left.+\ \left[(\lambda^2-\bar\lambda^2)(\mu+1)z^3-(\mu+3)(\nu^2-\bar\nu^2)z\right]\left[\bar\lambda\,\mathcal{C}_\nu\bar{\mathcal{C}}'_{\bar\nu}-\lambda\,\mathcal{C}'_\nu\bar{\mathcal{C}}_{\bar\nu}\right]\right\}$$

Une particularité de notre récurrence doit être signalée, qui en double l'intérêt. En effet de la même manière que l'on peut tirer les intégrales de Lommel initialisant la récurrence de Schafheitlin, de la récurrence elle même, (il suffit de faire $\mu = -1$ dans (26)), de même notre récurrence contient elle même potentiellement les termes initiaux qui permettent ensuite de l'expliciter. En effet y faisant $\mu = -1$, $\mu = -2$ ou $\mu = -3$, on en tire les <u>deux</u> premières intégrales qui permettent de l'expliciter (si $\nu = \bar\nu$).

Au total notre récurrence généralisant la méthode d'un auteur, englobe par ailleurs <u>tout</u> le formulaire d'un autre. C'est dire tout l'intérêt de notre généralisation [42].

Particularisant notre formule à divers cas, nous avons pu obtenir soit une explicitation globale, soit une explicitation progressive. C'est ainsi que nous avons eu, pour les intégrales I (Ch VIII, § 4, (43)) qui seules en définitive nous concernent (quoique nous avons étudié les intégrales $\mathcal{J}$ plus générales) :

$$(28)\quad I^{12}_{nn}(2p+1;\nu,\nu) = \frac{a^{2p+2}}{2(2p+1)}\left\{ 1 + \sum_{s=0}^{p-1}\left[\frac{2p}{2p-1}\cdots\frac{2s+2}{2s+1}\right]\left[\frac{\nu^2-p^2}{x^2_{\nu n}}\cdots \right.\right.$$

$$\left.\left.\cdots\frac{\nu^2-(s+1)^2}{x^2_{\nu n}}\right]\right\}\mathcal{C}'^2_\nu(x_{\nu n})$$

$$(29)\quad I^{12}_{nn}(1;\nu,\nu) = 0$$

$$(30)\quad I^{12}_{nn}(3;\nu,\nu) = 4a^4\,\frac{x_{\nu n}\,x_{\nu\bar{n}}}{\left[x^2_{\nu n}-x^2_{\nu\bar{n}}\right]^2}\qquad \mathcal{C}'_\nu(x_{\nu n})\,\mathcal{C}'_\nu(x_{\nu\bar{n}})$$

$$(31)\quad I^{12}_{nn}(5;\nu,\nu) = 8a^6\,\frac{x_{\nu n}\,x_{\nu\bar{n}}}{\left[x^2_{\nu n}-x^2_{\nu\bar{n}}\right]^2}\qquad \mathcal{C}'_\nu(x_{\nu n})\,\mathcal{C}'_\nu(x_{\nu\bar{n}})\left\{1-12\frac{x^2_{\nu n}+x^2_{\nu\bar{n}}}{\left[x^2_{\nu n}-x^2_{\nu\bar{n}}\right]^2}\right\}$$

etc...

On voit que ces dernières intégrales (qui vont correspondre aux éléments de matrice extradiagonaux) apparaissent, à un coefficient près, comme de simples fonctions rationnelles des zéros des fonctions de Bessel. Ceci mérite bien d'être signalé.

CHAPITRE IX

EXPRESSION DES ELEMENTS DE MATRICE PAR L'EMPLOI DE NOS FORMULAIRES INTEGRAUX

- *OSCILLATEUR LINEAIRE*

Compte tenu de nos formules intégrales étendant le formulaire d'Hermite, nous obtenons pour les éléments de matrice de x^M, dont l'expression de principe a été donnée, l'expression explicite suivante :

$$(1)\quad \langle n \left| \left(\frac{x}{x_o}\right)^M \right| n+k \rangle = \frac{1}{2^{M/2}} \; \frac{1}{2^{\frac{M-k}{2}}} \sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}} \; \frac{M!}{k!\left(\frac{M-k}{2}\right)!} \; F\left(-n;-\frac{M-k}{2};k+1,2\right)$$

$n = 0,1,2,\ldots$ $M = 0,1,2,\ldots$ k variant de 2 en 2 entre $-M$ et M.

Tous les autres éléments sont nuls.

On peut utiliser l'expression de travail :

$$(2)\quad \langle n \left| \left(\frac{x}{x_o}\right)^M \right| n+k \rangle = \frac{1}{2^{\frac{M}{2}}} \sqrt{\frac{(n+k)!}{n!}} \; \frac{M!}{\left(\frac{M+k}{2}\right)!} \; L_{nk}^{(M)}$$

où

$$(3)\quad L_{nk}^{(M)} = \sum_q \frac{1}{2^q} \; C_n^{\frac{M-k}{2}-q} \; C_{\frac{M+k}{2}}^{q}$$

- *OSCILLATEUR SPATIAL*

Pour l'oscillateur spatial, de même, reprenant l'expression de principe qui a été donnée pour les éléments de matrice de r^{2p}, suite à notre extension du formulaire de Laguerre, nous avons obtenu :

$$(4)\quad \langle N\ell m \left| \frac{r^2}{r_o^2} \right| N\ell m \rangle = N + \frac{3}{2}$$

$$(5)\quad \langle N+2, \ell, m \left| \left(\frac{r}{r_o}\right)^2 \right| N\ell m \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{(N-\ell+2)(N+\ell+3)}$$

Les autres éléments de matrice de r^2 sont tous nuls. D'une manière plus générale nous avons obtenu pour r^{2p}, les éléments de matrice :

$$(6)\quad \langle N\ell m \left| \left(\frac{r}{r_o}\right)^{2p} \right| N+2q, \ell, m\rangle = \sum_u C_p^u \, C_p^{u+q} \left(\frac{N-\ell}{2}\right)_{(u)} \sqrt{\left(\frac{N-\ell}{2}+1\right)^{(q)}} \times \ldots .$$

$$\ldots . \times \left(\frac{N+\ell+3}{2}+q\right)^{(p-q-u)} \sqrt{\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)^{(q)}}$$

$$(q = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots . \pm p) .$$

Soit, pour les premiers cas :

$$(7)\quad \langle N\ell m \left| \left(\frac{r}{r_o}\right)^4 \right| N\ell m\rangle = \left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}+1\right) + 4\left(\frac{N-\ell}{2}\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right) + \left(\frac{N-\ell}{2}\right)\left(\frac{N-\ell}{2}-1\right)$$

$$(8)\quad \langle N\ell m \left| \left(\frac{r}{r_o}\right)^4 \right| N+2, \ell, m\rangle = 2\sqrt{\left(\frac{N-\ell}{2}+1\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)} \quad \left(N+\frac{5}{2}\right)$$

$$(9)\quad \langle N\ell m \left| \left(\frac{r}{r_o}\right)^4 \right| N+4, \ell, m\rangle = \sqrt{\left(\frac{N-\ell}{2}+1\right)\left(\frac{N-\ell}{2}+2\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}+1\right)}$$

etc....

- *ATOME D'HYDROGENE*

A l'aide du formulaire de Gordon existant nous avons pu obtenir pour l'élément de matrice diagonal ou extradiagonal de $\frac{1}{r}$ ou r :

$$(10)\qquad \langle n\ell m \left| \frac{r_o}{r} \right| n\ell m \rangle = \frac{1}{n^2}$$

$$(11)\qquad \langle n\ell m \left| \frac{r}{r_o} \right| n\ell m \rangle = \frac{1}{2}\left\{ 3n^2 - \ell(\ell+1) \right\}$$

$$(12)\quad \langle n\ell m \mid \frac{r_o}{r} \mid n'\ell m \rangle =$$

$$(-1)^{n-\ell-1} 2^{2\ell+2} \frac{(n'+n-1)!}{\left[(n+\ell)!(n'+\ell)!(n-\ell-1)!(n'-\ell-1)!\right]^{\frac{1}{2}}} \frac{(nn')^{\ell}\ (n'-n)^{n+n'}}{(n+n')^{n+n'}\ (n'-n)^{2\ell+2}}$$

$$\times F\left(-(n-\ell-1), -(n'-\ell-1), -(n+n'-1), \left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)^2\right)$$

Pour l'élément de matrice non diagonal de r, il aura fallu itérer par deux fois la récurrence de Gordon :

$$(13)\quad \langle n\ell m \mid \frac{r}{r_o} \mid n'\ell m \rangle =$$

$$(-1)^{n-\ell-1} 2^{2\ell+2} (nn')^{\ell+2} \frac{(n+n'-1)!}{\sqrt{(n+\ell)!(n'+\ell)!(n'-\ell-1)!(n-\ell-1)!}} \frac{(n'-n)^{n+n'-2\ell-3}}{(n+n')^{n+n'+1}}$$

$$\times \left\{ 2n' F\left(-(n-\ell-1), -(n'-\ell-1); -n-n'+1; \left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)^2\right) \right.$$

$$\left. - 2(n'-\ell-1)\frac{n'+\ell}{n'+n-1}\ \frac{n'+n}{n'-n} F\left(-(n-\ell-1), -(n'-\ell-2); -n-n'+2; \left(\frac{n'+n}{n'-n}\right)^2\right)\right\}$$

{ On voit combien il est plus simple d'étudier l'approximation
{ classique sur $\frac{1}{r}$ plutôt que r.

Les éléments diagonaux de r^M sont connus, à l'aide du seul formulaire de Gordon, on a :

$$(14)\quad \langle n\ell m \mid \left(\frac{r}{r_o}\right)^M \mid n\ell m \rangle = \frac{1}{2^{M+1}}\ n^{M-1} \sum_u \frac{1}{u!}\ C^u_{n-\ell-1} \frac{(2\ell+2+M)!}{(2\ell+u+1)!} (-1-M-u)^{(2u)}.$$

- *LA PARTICULE DANS LE TROU SPHERIQUE*

Employant notre extension du formulaire de Lommel nous avons pu expliciter globalement les éléments diagonaux de r^{2p}, et de proche en

proche, les éléments extradiagonaux de r^{2p}, soit successivement :

$$(15)\qquad \langle n\ell m\,|r^{2p}|\,n\ell m\rangle = \frac{a^{2p}}{2p+1}\sum_{s}\left\{\frac{2p!!}{(2p-1)!!}\,\frac{(2s-1)!!}{2s!!}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{X^2_{n\ell}}\right]^{p-s}\times\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\times\prod_{s<t\leqslant p}\left[1-\frac{t^2-\frac{1}{4}}{\ell(\ell+1)}\right]\right\}$$

où $X_{n\ell}$ désigne le $n^{\text{ième}}$ zéro positif de $j_\ell(z)$.

En particulier :

$$(16)\qquad \langle n\ell m|\,r^2\,|n\ell m\rangle = \frac{a^2}{3}\left\{1+\frac{2}{1}\,\frac{\ell(\ell+1)-\frac{3}{4}}{X^2_{n\ell}}\right\}$$

$$(17)\qquad \langle n\ell m\,|r^4|n\ell m\rangle = \frac{a^4}{5}\left\{1+\frac{4}{3}\,\frac{\ell(\ell+1)-\frac{15}{4}}{X^2_{n\ell}}+\frac{4.2}{3.1}\,\frac{\ell(\ell+1)-\frac{15}{4}}{X^2_{n\ell}}\,\frac{\ell(\ell+1)-\frac{3}{4}}{X^2_{n\ell}}\right\}$$

etc...

Par ailleurs :

$$(18)\qquad \langle n\ell m\,|r^2|\,n'\ell m\rangle = 8a^2\frac{X_{n'\ell}\,X_{n\ell}}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^2}$$

$$(19)\qquad \langle n\ell m|\,r^4\,|n'\ell m\rangle = 16a^4\frac{X_{n'\ell}\,X_{n\ell}}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^2}\left\{1-12\,\frac{X^2_{n'\ell}+X^2_{n\ell}}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^2}\right\}$$

$$(20)\qquad \langle n\ell m\,|r^6|n'\ell m\rangle = 24a^6\,\frac{X_{n'\ell}\,X_{n\ell}}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^2}\left\{1-40\,\frac{X^2_{n'\ell}+X^2_{n\ell}}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^2}+32\,\frac{\ell(\ell+1)}{(X^2_{n\ell}-X^2_{n'\ell})^2}\right.$$

$$\left.+48\frac{(X^2_{n'\ell}+X^2_{n\ell})^2}{(X^2_{n'\ell}-X^2_{n\ell})^4}\right\}$$

etc...

On notera l'aspect particulier de ces derniers éléments de matrice : ils se présentent comme de simples fonctions rationnelles des zéros $X_{n\ell}$. Cette partie de notre travail est à notre connaissance entièrement inédite.

CHAPITRE X

APPROXIMATION CLASSIQUE. COMPARAISON LIMITE DES COEFFICIENTS DE FOURIER ET DES ELEMENTS DE MATRICE.

OSCILLATEUR LINEAIRE

Disposant désormais des coefficients de Fourier de x^M d'une part et d'autre part, grâce à notre extension des formulaires intégraux, des éléments de matrice diagonaux aussi bien qu'extradiagonaux de cette quantité, nous pouvons à présent nous livrer à notre propos initial, à savoir leur comparaison limite.

Dans le cas de l'oscillateur linéaire, ici considéré, l'affaire est extrêmement facile (quoique dans certains manuels où l'on aborde la question, on ne parvient qu'à la seule confrontation des C_o aux éléments diagonaux et qu'on n'y fait pas celle des C_k ($k \neq 0$) aux extradiagonaux).

Analysant le comportement asymptotique de nos nombres L^M_{nk} nous avons :

$$(1) \qquad L^{(M)}_{nk} \sim \frac{1}{(\frac{M-k}{2})!}\, n^{-\frac{k}{2}+\frac{M}{2}} \qquad \text{(quand n est grand).}$$

Il s'ensuit dès lors que :

$$(2) \qquad \langle n \mid (\frac{x}{x_o})^M \mid n+k \rangle \sim \frac{1}{2^{\frac{M}{2}}}\, C_M^{\frac{M-k}{2}}\, n^{\frac{M}{2}} \qquad \text{(n grand)}$$

Par ailleurs le coefficient de Fourier homologue peut s'écrire dans ces conditions, lui-même :

$$(3) \qquad C_k^{(M)} \sim \left(\frac{x_o}{\sqrt{2}}\right)^M C_M^{\frac{M-k}{2}}\, n^{\frac{M}{2}}$$

On voit bien dès lors que

$$(4) \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{\langle n \mid x^M \mid n+k \rangle}{C_k} = 1$$

C'est bien précisément ce que nous nous proposions d'établir.

Pour ce qui est des ω, l'on a en toute rigueur (et donc sans même être à la limite)

(5) $$\frac{\omega_{n'n}}{\omega} = k \qquad \forall_{n,n'}$$

La propriété concernant les ω est donc elle aussi satisfaite.

- *OSCILLATEUR SPATIAL*

De même, ici, nous sommes enfin en mesure d'opérer les rapprochements souhaités. Précisons tout d'abord que lors du passage à la limite on fait

(6) $N \to \infty$

(7) $\ell \to \infty$ comme $\frac{N}{\lambda}$, de façon que $\lambda = \dfrac{N+\frac{3}{2}}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}$ demeure constant, pour qu'il en soit de même de l'excentricité de l'ellipse orbite.

On a ici également en toute rigueur

(8) $$\frac{\omega_{N'N}}{\omega} = k$$

Ensuite, rapprochant C_o de $\langle N \left| r^2 \right| N \rangle$, on constate leur égalité absolue, sans même être à la limite, soit :

(9) $$\frac{\langle N \mid r^2 \mid N \rangle}{C_o} = 1 \qquad (\forall N, \text{ a fortiori donc pour } N \text{ grand})$$

Pour l'élément extradiagonal, l'écrivant, pour tenir compte de (7) sous la forme :

(10) $$\langle N+2 \left| \frac{r^2}{r_o^2} \right| N \rangle = \frac{1}{2}(N+\frac{3}{2}) \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2N + \frac{15}{4}}{(N+\frac{3}{2})^2}}$$

et le rapprochant du C_2, reécrit :

(11) $$C_2 = \frac{r_o^2}{2}(N+\frac{3}{2}) \sqrt{1 - \frac{1}{\lambda^2}}$$

on a bien :

$$(12) \qquad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \ell\to\infty}} \frac{\langle N+2 \mid r^2 \mid N\rangle}{C_2} = 1$$

Pour les autres coefficients de Fourier et leurs homologues matriciels la confrontation est parfaite puisqu'ils sont tous nuls.
Ces résultats concernant r^2 étant véritablement très simples, tout compte fait, à obtenir, nous avons poursuivi la comparaison entre quantités homologues pour r^{2p}.

Avec $\ell \sim \frac{N}{\lambda}$, nous avons pu écrire :

$$(13) \quad \langle N\ell m \mid (\frac{r}{r_o})^{2p} \mid N+2q, \ell\, m\rangle \sim \frac{N^p}{2^p} \sum_{u=0}^{p-q} C_p^u\, C_p^{u+q}\, (1-\frac{1}{\lambda})^{\frac{q}{2}+u}\, (1+\frac{1}{\lambda})^{p-\frac{q}{2}-u}$$

et de même :

$$(14) \qquad \frac{C_{2q}^{(2p)}}{r_o^{2p}} \sim \frac{N^p}{2^p} \sum_{u=0}^{\left[\frac{p-q}{2}\right]} 2^{p-|q|-2u}\, (1-\frac{1}{\lambda^2})^{u+\frac{|q|}{2}}\, C_p^u\, C_{p-u}^{u+|q|}$$

Or on constate bien pour les cas concrets successifs, l'identité limite de ces deux expressions.
L'on aura donc de manière très générale :

$$(15) \qquad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \ell\to\infty}} \frac{\langle N \mid r^{2p} \mid N+2q\rangle}{C_{2q}^{(2p)}} = 1$$

De façon détaillée, nous avons eu pour fixer les idées, les deux suites homologues entremêlées ci-dessous :

$$(16) \qquad \frac{C_o^{(2)}}{r_o^2} = N + \frac{3}{2}$$

$$(16\text{ bis}) \qquad \langle N \mid \frac{r^2}{r_o^2} \mid N\rangle = N + \frac{3}{2}$$

$$(17) \qquad \frac{C_2^{(2)}}{r_o^2} = \frac{1}{2}\,(N+\frac{3}{2})\,(1-\frac{1}{\lambda^2})^{\frac{1}{2}}$$

(17bis) $$\langle N \left|\frac{r^2}{r_o^2}\right| N+2\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{(N-\ell+2)(N+\ell+3)}$$

(18) $$\frac{C_o^{(4)}}{r_o^4} = \frac{1}{2}\left(N+\frac{3}{2}\right)^2\left(3-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

(18bis) $$\langle N \left|\frac{r^4}{r_o^4}\right| N\rangle = \left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}+1\right)+4\frac{(N-\ell)}{2}\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)+\frac{(N-\ell)}{2}\left(\frac{N-\ell}{2}-1\right)$$

(19) $$\frac{C_2^{(4)}}{r_o^4} = \left(N+\frac{3}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)^{\frac{1}{2}}$$

(19bis) $$\langle N \left|\frac{r^4}{r_o^4}\right| N+2\rangle = 2\sqrt{\left(\frac{N-\ell}{2}+1\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)}\left(N+\frac{5}{2}\right)$$

(20) $$\frac{C_o^{(4)}}{r_o^4} = \frac{1}{4}\left(N+\frac{3}{2}\right)^2\left(1-\frac{1}{\lambda^2}\right)$$

(21) $$\langle N \left|\frac{r^4}{r_o^4}\right| N+4\rangle = \sqrt{\left(\frac{N-\ell}{2}+1\right)\left(\frac{N-\ell}{2}+2\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}\right)\left(\frac{N+\ell+3}{2}+1\right)}$$

etc... etc...

La confrontation qui s'opère entre ces deux suites établit la validité de l'approximation classique pour l'exemple considéré.

- *ATOME D'HYDROGENE*

C'est pour cet exemple capital entre tous que nous avons en les plus lourds calculs pour faire aboutir la confrontation des coefficients de Fourier avec les éléments matriciels quantiques. Il a fallu travailler l'expression de ceux-ci, qui, on l'a vu, s'établit à partir de la fonction hypergéométrique, de manière à lui faire restituer... la fonction de Bessel qui figure dans le résultat classique! On voit à cet énoncé que la chose n'est pas simple, mais on conçoit tout aussitôt qu'elle est possible puisque comme on le sait cette fonction hypergéométrique est à l'origine de la plupart des fonctions usuelles quoique spéciales, de la Physique Mathématique.

La Mécanique Quantique, c'est-à-dire la résolution de l'équation de Schrödinger est essentiellement concernée par cette fonction qui sert à en décrire la plupart des solutions. La manipulant nous sommes donc au coeur des problèmes. Disons par ailleurs que l'intérêt que Monsieur le Doyen E. Durand a bien voulu accorder à ce travail - qu'il nous a proposé - en lui offrant les honneurs de son prochain ouvrage - impatiemment attendu - a été pour nous un stimulant sans égal, nous faisant affronter allègrement toutes les difficultés du calcul.

L'expression commode de $< n \left|\frac{1}{r}\right| n+k>$, pour opérer la comparaison sera la suivante, strictement rigoureuse encore :

$$(21) \quad <N \left|\frac{1}{r}\right| N+k> = \frac{1}{r_o}\frac{1}{N^2}\left(\frac{k}{2}\right)^k \sum_{u=0}^{N-\ell-1} \left\{ \frac{(-1)^u}{u!(u+k)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2u}\left[\frac{1}{N^{2u+k}}\frac{(N+k+\ell+u)!}{(N-\ell-1-u)!}\times \cdots \right.\right.$$

$$\left.\left. \cdots \sqrt{\frac{(N-\ell-1)!(N+k-\ell-1)!}{(N+\ell)!(N+k+\ell)!}}\right]\left[\frac{\left(1+\frac{k}{N}\right)^{\ell}}{\left(1+\frac{k}{2N}\right)^{k+2\ell+2+2u}}\right]\right\}$$

Nous rappelons que le coefficient de Fourier correspondant s'écrit :

$$(22) \qquad C_k^{(-1)} = \frac{1}{r_o}\frac{1}{N^2} J_k \quad (k\ e)$$

soit, en développant la fonction de Bessel, (e est l'excentricité de l'ellipse orbite)

$$(23) \qquad C_k^{(-)} = \frac{1}{r_o}\frac{1}{N^2}\left(\frac{k}{2}\right)^k \sum_{u=0}^{\infty} \frac{(-1)^u}{u!(u+k)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2u} e^{k+2u}$$

On voit d'ores et déjà s'esquisser la parenté des deux expressions, parenté qui va se transformer en identité, à la limite. En effet faisant tendre N vers l'infini, ainsi que ℓ , mais lui comme $\sqrt{1-e^2}n$, de manière à ce que l'excentricité e, donnée par $e^2 = 1 - \frac{\ell(\ell+1)}{n^2}$,

demeure constante, on a, en utilisant au passage la formule de Stirling

$$(24) \qquad n! \sim \sqrt{2\pi}\ n^{n+\frac{1}{2}} \exp(-n)$$

pour analyser le comportement asymptotique des factorielles figurant dans (21)

$$1^{er}\text{ crochet} \to e^{k+2u}$$
$$2^{ème}\text{ crochet} \to 1$$

On a bien dès lors :

$$(24) \qquad \lim_{\substack{N\to\infty \\ \ell\to\infty}} \frac{\langle N+k|\ \frac{1}{r}\ |N\rangle}{C_k^{(-1)}} = 1$$

C'est le résultat cherché.

Le problème pour l'élément diagonal est tout étudié : il y a égalité stricte, sans même attendre d'être à la limite, soit :

$$(25) \qquad \langle N\,\ell\,m\ |\frac{1}{r}\ |N\ell m\rangle = C_o^{(-1)} = \frac{1}{r_o n^2} \qquad \text{(cf supra)}$$

De même la condition sur les ω est vérifiée. En effet on peut écrire

$$(26) \qquad \omega_{n+k,n} = k\ \frac{\mu K^2}{\hbar^3 n^3}\ (1 + \frac{k}{2n})\ (1 + \frac{k}{n})^{-2}$$

La pulsation classique, pour l'énergie E_n , s'écrivant :

$$(27) \qquad \omega = \mu \frac{K^2}{\hbar^3}\ \frac{1}{n^3}$$

l'on aura

$$(27) \qquad \omega_{n+k,n} = k\ \omega\ \ (1 + \frac{k}{2n})(1 + \frac{k}{n})^{-2}$$

et donc, à la limite $n = N \to \infty$, l'on aura bien :

$$(28) \qquad \lim_{N\to\infty} \frac{\omega_{N+k,N}}{\omega} = k$$

L'approximation classique pour l'atome d'hydrogène est donc établie. Dans un souci d'approfondissement nous nous sommes également préoccupés de l'étudier pour r (en sus de $\frac{1}{r}$). Comme on va le voir, l'étude, que nous avons pu néanmoins mener à bien, sera plus laborieuse. Moyennant l'explicitation de la récurrence de Gordon, qui a été exposée plus haut nous avons pu mettre l'élément de matrice extradiagonal [35] de r, sous la forme (exacte au demeurant) propice à notre propos :

$$(29)\quad \langle N\left|\frac{r}{r_o}\right|N+k\rangle = -\frac{N^2}{2^k}\,k^{k-2}\sum_{u=0}^{N-\ell-1}\left\{\frac{(-1)^u}{u!\,(u+k)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2u}\left[2(k+u) - k\,\frac{1+\frac{k}{N}}{1+\frac{k}{2N}}\,\frac{1+\frac{k+u}{N+\ell}}{1+\frac{k}{N+\ell}}\right]\left[\frac{(1+\frac{k}{N})^{\ell+2}}{(1+\frac{k}{2N})^{k+2\ell+2u+2}}\right]\times\right.$$

$$\left.\times\left[\frac{1}{N^{2n+k}}\,\frac{(N+k+\ell+u)!}{(N-\ell-1-u)!}\sqrt{\frac{(N-\ell-1)!\,(N+k-\ell-1)!}{(N+\ell)!\,(N+k+\ell)!}}\right]\right\}$$

L'expression classique homologue s'écrit (cf supra)

$$(30)\quad C_k^{(1)} = -ae\,\frac{J'_k(ke)}{k} = -N^2\,\frac{k^{k-2}}{2^k}\sum_{u=0}^{\infty}\frac{(-1)^u}{u!\,(k+u)!}\left(\frac{k}{2}\right)^{2u}(k+2u)\,e^{k+2u}$$

On voit bien d'ores et déjà, dans ces écritures, poindre la parenté de ces deux expressions, parenté qui va se transformer effectivement en identité lors du passage à la limite.
Faisant en effet $N \to \infty$, $\ell \to \sqrt{1-e^2}\,N$, utilisant la formule de Stirling comme plus haut, on voit que le 1er crochet tend vers $k + 2u$, le second vers 1, le 3ème vers e^{k+2u}. Au total on aura donc bien

$$(31)\quad \lim_{N\to\infty}\frac{\langle N+k\left|r\right|N\rangle}{C_k^{(1)}} = 1$$

Pour élargir encore la comparaison nous avons donné dans notre fascicule cité les $C_o^{(M)}$ d'une part et les $\langle N|r^M|N\rangle$ d'autre part pour

M = 1,2,3,4....-1,-2,-3,-4, etc...

Nous avons eu :

$$(32)\quad C_o^{(1)} = \frac{r_o}{2}\,N^2\,(e^2+2)$$

$$(32\text{ bis})\quad \langle N|r|N\rangle = \frac{r_o}{2}\left[3N^2 - \ell(\ell+1)\right]$$

$$(33)\quad C_o^{(2)} = \frac{r_o^2}{2}\,N^4\,(3e^2+2)$$

(33bis) $$\langle N|r^2|N\rangle = \frac{r_o^2}{2} N^2 \left[5N^2 + 1 - 3\ell(\ell+1)\right]$$

(34) $$C_o^{(3)} = \frac{r_o^3}{8} N^6 (e^4 + 24\, e^2 + 8)$$

(34bis) $$\langle N|r^3|N\rangle = \frac{r_o^3}{8} N^2 \left[35N^2(N^2-1) - 30N^2(\ell+2)(\ell-1) + 3(\ell+2)(\ell+1)\ell(\ell-1)\right]$$

(35) $$C_o^{(4)} = \frac{r_o^4}{8} N^8 \ (15e^4 + 40e^2 + 8)$$

(35bis) $$\langle N|r^3|N\rangle = \frac{r_o^4}{8} N^4 \left[63N^4 - 35N^2(2\ell^2+2\ell-3) + 5\ell(\ell+1)(3\ell^2+3\ell-10) + 12\right]$$

.....

(36) $$C_o^{(-1)} = \frac{1}{r_o} \ \frac{1}{N^2}$$

(36bis) $$\langle N \ |\frac{1}{r}| \ N\rangle = \frac{1}{r_o} \ \frac{1}{N^2}$$

(37) $$C_o^{(-2)} = \frac{1}{r_o^2} \ \frac{1}{N^4\sqrt{1 - e^2}}$$

(37bis) $$\langle N| \ \frac{1}{r^2}| \ N\rangle = \frac{1}{r_o^2} \ \frac{1}{N^3(\ell + \frac{1}{2})}$$

(38) $$C_o^{(-3)} = \frac{1}{r_o^3} \ \frac{1}{N^6(1-e^2)\frac{3}{2}}$$

(38bis) $$\langle N \ |\frac{1}{r^3}| \ N\rangle = \frac{1}{r_o^3} \ \frac{1}{N^3(\ell+1)(\ell+\frac{1}{2})\ell}$$

(39) $$C_o^{(-4)} = \frac{1}{r_o^4} \ \frac{e^2 + 2}{2N^8(1-e^2)\frac{5}{2}}$$

(39bis) $$\langle N \ |\frac{1}{r^4}| \ N\rangle = \frac{1}{2} \ \frac{3N^2 - \ell(\ell+1)}{N^5(\ell+\frac{3}{2})(\ell+1)(\ell+\frac{1}{2})\ell(\ell-\frac{1}{2})}$$

Faisant $N \to \infty$, $\ell \sim \sqrt{1 - e^2}\ N$ conduit bien à l'identité à la limite des formules avec les formules "bis". C'est sur ce tableau comparatif particulièrement probant de la validité de l'approximation classique

(et singulièrement absent des meilleurs Traités) que nous concluons ce paragraphe.

- *LA PARTICULE DANS LE TROU SPHERIQUE*

Nous avons obtenu pour ce problème les formules suivantes :

$$\omega = \frac{\hbar \pi}{\mu a^2} \frac{X_{N\ell}}{\sqrt{1 - \frac{\ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}}} \tag{40}$$

$$\omega_{N+k,N} = \frac{\hbar}{2\ \mu a^2} \left(X_{N+k,\ell}^2 - X_{N,\ell}^2\right) \tag{41}$$

Moyennant le développement des grands zéros $X_{N,\ell}$: (formule d'Abramowitz[43])

$$X_{N\ell} = (N + \frac{\ell}{2})\pi - \frac{\ell(\ell+1)}{2(N+\frac{\ell}{2})\pi} \pm \ldots\ldots \tag{42}$$

on obtient aisément le premier résultat :

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\omega_{N+k,N}}{\omega} = k \tag{43}$$

Pour le second résultat on a de même

$$C_o^{(2)} = \frac{a^2}{3}\left\{1 + \frac{2\ \ell(\ell+1)}{X_{N\ell}^2}\right\} \tag{43}$$

$$\langle N \mid r^2 \mid N\rangle = \frac{a^2}{3}\left\{1 + \frac{2\ell(\ell+1) - \frac{3}{2}}{X_{N\ell}^2}\right\} \tag{44}$$

On a donc bien immédiatement

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\langle N \mid r^2 \mid N\rangle}{C_o^{(2)}} = 1 \tag{45}$$

Pour le troisième, on a ,en pratiquant (42) dans l'expression obtenue précédemment :

$$(46)\qquad \langle N+k|\, r^2 \,|N\rangle \# \frac{2a^2}{\pi^2 k^2}\ \frac{1+\dfrac{k}{N+\ell/2}}{1+\dfrac{k}{N+\dfrac{\ell}{2}}+\ldots}\left\{1-\frac{\ell(\ell+1)}{(N+\frac{\ell}{2})^2\pi^2}\pm\ldots\right\}$$

Comparant au C homologue que l'on développe lui même sous la forme

$$(47)\qquad C_k^{(2)} = \frac{2a^2}{\pi^2 k^2}\left\{1-\frac{\ell(\ell+1)}{(N+\frac{\ell}{2})^2\pi^2}\pm\ldots.\right\}$$

on a encore

$$(48)\qquad \lim_{N\to\infty}\ \frac{\langle N+k|\, r^2 \,|N\rangle}{C_k^{(2)}} = 1 \qquad (k\neq 0)\ .$$

Ainsi l'approximation classique est-elle encore testée en ce cas. Notons que le passage à la limite repose somme toute sur une relation purement mathématique concernant les grands zéros $X_{N\ell}$, que nous avons pu dégager, à partir de l'expression asymptotique. Elle s'écrit :

$$(49)\qquad \lim_{N\to\infty}\ \frac{1}{2\pi k}\ \frac{(X^2_{N+k,\ell}-X^2_{N\ell})(X^2_{N\ell}-\ell(\ell+1)\frac{1}{2}}{X^2_{N\ell}} = 1$$

Pour approfondir le sujet nous avons étudié l'approximation des éléments matriciels diagonaux. Rapprochant les résultats obtenus plus haut et que nous rappelons :

$$(50)\qquad C_o^{(2p)} = \frac{a^{2p}}{2p+1}\ \sum_{s=0}^{p}\left\{\frac{2p!!}{2s!!}\ \frac{(2s-1)!!}{(2p-1)!!}\left[\frac{\ell(\ell+1)}{X^2_{N\ell}}\right]^{p-s}\right\}$$

$$(51)\qquad \langle N|\, r^{2p}\,|N\rangle = \frac{a^{2p}}{2p+1}\ \sum_{s=0}^{p}\left\{\frac{2p!!}{2s!!}\left[\prod_{s<\ t\ \leq p}\ \frac{(\ell+\frac{1}{2})^2-t^2}{X^2_{N\ell}}\right]\right\}$$

et faisant $N\to\infty$, on vérifie bien que ces expressions sont identiques. (51) a pu être obtenue grâce à nos travaux sur l'intégrale de Lommel. On trouvera remarquable la parenté - avant tout passage à la limite - des expressions (50) et (51) qui, répétons-le, proviennent de deux théories de la physique absolument lointaines et apparemment différentes, théories qui en tout cas se développent sur des mathématiques bien étrangères l'une à l'autre.

Les méthodes de la Physique Mathématique que nous avons déployées dans cette étude nous ont permis en tous les cas de faire se rejoindre deux corps de doctrine différents, de résorber un hiatus génant, d'établir un raccordement entre des résultats qui n'avaient été guère rapprochés jusqu'alors.

On admirera la puissance, alliée à la souplesse, de ces méthodes qui d'une manière générale, permettent de mettre en évidence l'Harmonie Mathématique qui paraît gouverner les Phénomènes Naturels.....

REFERENCES

CHAPITRE I

(1) E. DURAND : *Electrostatique*
tome II, Masson 1966, p. 2

(2) L. ROBIN : *Fonctions sphériques de Legendre*
Gauthier-Villars, Paris I, 1959, p. 158

(3) A. LEVY :
Comptes Rendus, Acad.Sc.Paris, t.263, p. 119-121 (11 juillet 1966)
série B

(4) A. LEVY :
Comptes Rendus, Acad.Sc.Paris, t.263, p.1054-1056 (7 novembre 1966)
série B

(5) A. LEVY :
Comptes Rendus, Acad.Sc.Paris, t.263, p.523-526 (22 août 1966)
série B

(6) E. DURAND : *Electrostatique*
tome III, Masson 1966, p. 240

CHAPITRE II

(7) P.M. MORSE & FESBACH : *Methods of Theoriticals Physics*
Mac Grawhill, 1953, p.1000

(8) A. LEVY : *Contribution à l'étude de l'expansion multipolaire en physique*
ICNT, 1967, p.14-18

(9) MAC ROBERT : *Spherical Harmonics*
Dover Publications, New York, 1948, p. 239

(10) H. WEYL : *The theory of Groups and Quantum Mechanics*
Dover

(11) L. ROBIN :
opus cité, p.158, formule (30)

(12) A. LEVY :
opus cité en (8) : p.36-39

(13) E. DURAND : *Electrostatique*
Tome I, Masson, Paris 1964, p. 95

(14) A. LEVY :
Comptes Rendus, t.264, p.538-540 (13 mars 1967) série A

(15) P.M. MORSE : *Methods of Theoretical Physics*
Mac GrawHill, tome II, p.1281

(16) P.M. MORSE :
ibidem, p. 274

(17) E. DURAND : *Electrostatique*
Tome I, Masson, Paris 1964, p. 22

(18) E. DURAND :
opus cité, I, p. 167

(19) R.J. BUCKLER & J.O. HIRSHFELDER :
Phys. Rev. 83,628, 1951 ; 85,149, 1952

(20) P.M. MORSE :
opus cité, p. 1327

(21) E. DURAND :
opus cité, I, p. 468

(22) E. DURAND :
opus cité, II, p. 232

(23) A. LEVY :
opus cité en (8), p. 70-74

(24) E. DURAND :
opus cité, I, p. 176

(25) L. ROBIN
opus cité, p. 149

CHAPITRE III

(26) A. LEVY :
Comptes Rendus, Acad.Sc.Paris, t.268, p.353-356, série A

(27) H. ARZELIES : *La dynamique relativiste et ses applications*
tome II, Gauthier-Villars, 1958, p. 134

(28) A. ERDELYI : *Higher transcendental functions*
Mac GrawHill, 1953, p. 2951

(29) A. ERDELYI :
opus cité, p. 319

(30) M. ROSEAU : *Vibrations non linéaires et Théorie de la Stabilité*
Springer, 1966, p. 76
ou T. SAATY : *Non linear Mathematics*
International Series, 1964, p. 259

(31) I. GOLD :
J. Franklin Institue, t.264, 1957, p.25

(32) H. ZATKIS & R. PENFIELD :
J. Franklin Institute, t.262, 1956, p.121

CHAPITRE IV

(32) A. LEVY :
Comptes Rendus Acad.Sc. Paris, t.268, p.353-356, série A
et A. LEVY : *Le problème de Képler en Mécanique Classique et en relativité*
Publication à l'I.C.N.T.

(33) H. ARZELIES : *La Dynamique Relativiste*
Fasc.II, Gauthier-Villars, 1958, p. 190

(34) G. PETIAU : *La théorie des fonctions de Bessel*
C.N.R.S., 1955, p. 313

(34b) WATSON : *A treatise on the theory of Bessel functions*
Cambridge, 1962, p. 550

(34t) D. BROUWER & G. CLEMENCE : *Methods of Celestial Mechanics*
Academic Press, 1961, p. 76

(34q) P. APPEL : *Traité de Mécanique Rationnelle*
Gauthier-Villars, 1941, t.I, p. 441-442

CHAPITRE V

(35) E. DURAND :
C.R. Acad.Sc. Paris,t.267, p.1189-1191, série B

(36) L. DURAND :
C.R.Acad.Sc. Paris, t.267, p. 1377-1379, série B

(37) LANDAU : *Mécanique Quantique. Théorie non Relativiste*
Editions MIR, 1966

(38) K.S. KOLBIG : *A sthort table of a definite integral involving a product of Bessel functions*
CERN, Genève, 65-16, 3 Mai 1965
T. BUTLER & K. POLHAUSEN : *Tables of definite integrals involving Bessel Functions of the First Kind*
WADC Tech. Report 54-420, Wright Air Development Center, Ohio (1954)

(39) W. GORDON : *Zur Berechnung der matrizen beim Wasserstoffatom*
Annalen der Physik, 1929, p. 1031-1056

(40) J. KILPATRICK & R.L. SASS : *Structure of the X^p matrices in the simple harmonic oscillator representation*
The Journal of Chemical Physics, vol. 12, n°7, 1 avril 1965

(41) P. SCHAFHEITLIN :
Berliner Sitzungsberichte, vol. 1906, p. 88

(42) A. LEVY :
C.R.Acad.Sc. Paris, t. 269, p. 609-612, série A
ou A. LEVY : *Contribution à l'étude des fonctions de Bessel*
Publication à l'I.C.N.T.
A. LEVY :
Zentralblatt für Mathematik (à paraître)

(43) ABRAMOWITZ :
M.T.A.C. 1, p. 354.

TABLE DES MATIERES

- INTRODUCTION

- PREMIERE PARTIE : "Les Fonctions Spéciales en Electrostatique"

. Chapitre I. "Les Problèmes d'influence des multipoles placés devant des sphères"

§ 1 - Position du problème. Inversion spatiale de Lord Kelvin ..... p. 1

§ 2 - Formules du changement d'origine pour les harmoniques sphériques solides ..... p. 1

§ 3 - Eléments de réduction multipolaire en O, d'un multipole situé en A ..... p. 2

§ 4 - Relations auxiliaires pour le changement d'origine de A en O et de O en B ..... p. 3

§ 5 - Image d'un unipole sis en A ..... p. 4

§ 6 - Images d'un dipole sis en A ..... p. 5

§ 7 - Images d'un multipole axial et diamétral sis en A ..... p. 5

§ 8 - Images d'un multipole d'ordre m et de degré m, sis en A ..... p. 7

§ 9 - Images d'un multipole d'ordre m et de degré m, dans une sphère dielectrique ..... p. 8

. Chapitre II. "Les Problèmes d'énergie mutuelle de deux multipoles. Théorie de la polarisation et de la double polarisation des harmoniques sphériques".

- Section 1 : La différentiation multidirectionnelle des opérandes harmoniques.

§ 1 - Définition des nombres L ..... p. 14

§ 2 - Décomposition d'une forme homogène bidimensionnelle ..... p. 14

§ 3 - Décomposition d'une forme homogène de degré n, à 3 variables liées par $x^2+y^2+z^2 = 0$ ..... p. 15

§ 4 - Notion de forme homogène de degré n, définie par n axes. Expression ordonnée ..... p. 15

§ 5 - Décomposition canonique d'une forme homogène définie par n axes, à 3 variables liées par $x^2+y^2+z^2 = 0$ ..... p. 16

§ 6 - Retour au réel et interprétation. Mise en évidence des axes des harmoniques sphériques .... p. 16

§ 7 - Définition de l'opérateur de polarisation .... p. 17

§ 8 - Décomposition canonique de l'opérateur de polarisation ..... p. 18

§ 9 - Règle de différentiation multidirectionnelle des opérandes harmoniques ..... p. 18

§ 10 - Exemple de différentiation quelconque d'un opérande harmonique ..... p. 19

- Section 2 : Polarisation des harmoniques sphériques solides irréguliers. Généralisation de la formule d'Hobson (qui polarise $\frac{1}{R}$ seulement).

§ 11 - Notion d'Harmonique polarisé. Notations ..... p. 20

§ 12 - Rappel de la formule d'Hobson (qui polarise $\frac{1}{R}$ seulement) ..... p. 20

§ 13 - Produit de deux formes fondamentales ..... p. 21

§ 14 - Généralisation de la formule d'Hobson pour la génération des harmoniques irréguliers ..... p. 22

§ 15 - Obtention immédiate de la Série de Laplace d'un harmonique polarisé, à l'aide de notre décomposition canonique de l'opérateur de polarisation ..... p. 22

§ 16 - Exemple fondamental : polarisation de $\frac{1}{R}$, Série de Laplace des dérivées de $\frac{1}{R}$, cas d'un axe n^{uple} de différentiation ..... p. 23

§ 17 - Double polarisation de $\frac{1}{R}$ ..... p. 25

- Section 3 : Polarisation des harmoniques sphériques solides réguliers. Généralisation des formules du type "Hobson", les concernant.

§ 18 - Première étape de la construction d'une formule de type "Hobson" pour les harmoniques réguliers ..... p. 26

§ 19 - Seconde étape de la construction d'une formule de type "Hobson" pour les harmoniques réguliers ..... p. 27

§ 20 - Synthèse : Construction de notre formule de type "Hobson" pour les harmoniques réguliers.... p. 28

§ 21 - Polarisation des harmoniques réguliers ..... p. 28

- Section 4 : Application de la théorie des harmoniques polarisés au problème du potentiel d'un multipole en Electrostatique.

§ 22 - Sur la conception même d'un multipole en Electrostatique ..... p. 29

§ 23 - Correspondance des composantes cartésiennes et sphériques d'un multipole ..... p. 29

§ 24 - Retour sur le problème des composantes par la polarisation d'un harmonique régulier ..... p. 31

- Section 5 : Application de la théorie de la Double Polarisation des Harmoniques aux problèmes de l'énergie mutuelle de deux multipoles, en Electrostatique.

§ 25 - Energie d'un multipole dans un champ extérieur p. 33

§ 26 - Energie d'un multipole dans le champ d'un autre multipole (énergie mutuelle) ..... p. 33

§ 27 - Notion de multipole fictif, produit, dans le problème de deux multipoles ..... p. 34

- Section 6 : Exemples de Calcul d'énergie mutuelle et de forces par la méthode de réduction multipolaire.

§ 28 - Caractérisation cartésienne et sphérique d'un multipole axial relativement à son axe ..... p. 36

§ 29 - Caractérisation cartésienne et sphérique d'un multipole axial, relativement à un axe quelconque ..... p. 36

§ 30 - Eléments de réduction multipolaires d'un "dipole fini", en son centre ..... p. 37

§ 31 - Calcul de l'énergie mutuelle de deux dipoles finis ..... p. 38

§ 32 - Force exercée sur un multipole axial et diamétral par une sphère conductrice au potentiel zéro ..... p. 39

§ 33 - Force exercée sur un anneau, dont l'axe passe par le centre d'une sphère au potentiel 0 ... p. 40

§ 32 - Force exercée sur un aimant, dont l'axe passe par le centre d'une sphère de potentiel 0 ... p. 40

§ 33 - Force exercée sur un multipole axial et dirigé vers le zéro ..... p. 39

§ 34 - Force exercée sur un multipole axial et dirigé vers le centre d'une sphère conductrice de potentiel nul par rapport à l'infini ..... p. 38

§ 35 - Eléments de réduction multipolaires d'un "dipole fini", en son centre ..... p. 37

§ 36 - Eléments de réduction multipolaires d'un multipole axial, relativement à un axe quelconque ..... p. 36

§ 37 - Caractérisation cartésienne et sphérique d'un multipole axial relativement à son axe ..... p. 36

§ 38 - Caractérisation cartésienne et sphérique d'un multipole (énergie mutuelle) ..... p. 33

§ 39 - Notion de multipole fictif, produit, dans le problème de deux multipoles ..... p. 34

- Section 6 : Exemples de calcul d'énergie mutuelle et de forces par la méthode de réduction multipolaire.

§ 40 - Energie d'un multipole dans un champ extérieur p. 33

- Section 5 : Application de la théorie de la Double Polarisation des Harmoniques aux problèmes de l'énergie mutuelle de deux multipoles, en Electrostatique

§ 41 - Retour sur le problème des composantes par la polarisation d'un harmonique régulier ..... p. 31

§ 42 - Correspondances des composantes cartésiennes et [illegible] d'un multipole ..... p. 29

- *Section 7 : Expression de l'énergie mutuelle de 2 multipoles, à partir de leurs axes. Théorie de Maxwell des polynomes de Laplace.*

§ 34 - Formule de Maxwell ..... p. 41

§ 35 - Application au problème de l'énergie ..... p. 42

- SECONDE PARTIE : "Les fonctions Spéciales en Relativité"

. Chapitre III. "L'oscillateur linéaire relativiste"

§ 1 - Obtention de la loi horaire à partir de l'intégrale première de l'énergie ..... p. 43

§ 2 - Expression de la période, ne faisant intervenir qu'une intégrale complète de Legendre ..... p. 44

§ 3 - Formules annexes ..... p. 44

§ 4 - Obtention de la loi de temps $x = x(t)$ par la méthode des Perturbations ..... p. 45

§ 5 - Calcul direct, approché, des coefficients de Fourier de $x(t)$ ..... p. 46

. Chapitre IV. "Le mouvement keplerien sur la Rosace de Sommerfeld"

§ 1 - Position du problème. Trajectoire..... p. 47

§ 2 - Série de Fourier de $r(t)$ ..... p. 49

§ 3 - Autres généralisations relativistes de Séries de Fourier classiques ..... p. 51

- TROISIEME PARTIE : "Les Fonctions Spéciales en Mécanique Quantique"

. Chapitre V. "Principe de l'approximation classique en Mécanique Quantique

§ 1 - Exposé ..... p. 54

. Chapitre VI. "Les Mouvements Périodiques classiques et les Coefficients de Fourier"

§ 1 - Exemples traités ..... p. 57

§ 2 - L'oscillateur linéaire en traitement classique ..... p. 57

§ 3 - L'oscillateur spatial isotrope en traitement classique ..... p. 58

§ 4 - L'atome d'hydrogène en traitement classique . p. 61

§ 5 - La particule dans le trou sphérique en traitement classique ..... p. 63

. Chapitre VII. "Le traitement quantique et le Principe du Calcul des Eléments de Matrice"

§ 1 - L'oscillateur linéaire en traitement quantique p. 66

§ 2 - L'oscillateur spatial en traitement quantique p. 66

§ 3 - L'atome d'hydrogène en traitement quantique . p. 68

§ 4 - La particule dans le trou sphérique en traitement quantique ..... p. 70

. Chapitre VIII. "Contribution à l'extension de divers formulaires intégraux, notamment celui de Lommel-Sonine"

§ 1 - Intégrales d'Hermite ..... p. 72

§ 2 - Intégrales de Laguerre ..... p. 73

§ 3 - Intégrales de Gordon ..... p. 74

§ 4 - Intégrales de Lommel-Sonine ..... p. 76

. Chapitre IX. "Expression des éléments de matrice par l'emploi de nos formulaires intégraux"

§ 1 - Eléments de matrice pour l'oscillateur linéaire ..... p. 80

§ 2 - Eléments de matrice pour l'oscillateur spatial ..... p. 80

§ 3 - Eléments de matrice pour l'atome d'hydrogène. p. 81

§ 4 - Eléments de matrice pour la particule dans le trou sphérique ..... p. 82

. Chapitre X. " Approximation Classique. Comparaison limite des coefficients de Fourier et des éléments de matrice"

§ 1 - Approximation classique pour l'oscillateur linéaire ..... p. 84

§ 2 - Approximation classique pour l'oscillateur spatial ..... p. 85

§ 3 - Approximation classique pour l'atome d'hydrogène ..... p. 87

§ 4 - Approximation classique pour la particule dans le trou sphérique ..... p. 92